



Er worden **5 vragen** gesteld. Vul op ieder blad je naam in. Motiveer of bewijs iedere uitspraak. Los alle vragen op, op een apart blad! Het examen duurt 2u30.  
Veel succes!

1. (6 punten) Bereken alle oplossingen in  $\mathbb{C}$ :

(a)  $((3 - i)^2 - 3)i$

(b)  $2z^4 - 3z^2 + 2 = 0$

(c)  $\sqrt[i]{i}$

2. (6 punten) Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{1}{z(1 + z^2)}.$$

Bepaal van deze functie de Laurentreeks, welke convergent is in de gebieden:

(a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ ,

(b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ .

3. (12 punten) Zij  $a$  een positief reëel getal. We definiëren de functie  $f$  door

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(1 + z^2)^2}.$$

(a) Bepaal de polen van de functie  $f$  en hun orde.

(b) Noem  $\gamma_R$  de halve cirkelboog in het bovenhalfvlak van  $R$  naar  $-R$ . Toon aan dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

(c) Gebruik het resultaat van de vorige deelvraag om de volgende intergraal te berekenen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(1 + x^2)^2} dx.$$

4. (7 punten) De Laplace transformatie

(a) Bereken de inverse Laplace getransformeerde  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+3}{p^2+4p+7} \right\}$

(b) Bepaal de Laplace getransformeerde  $\mathcal{L} \{ |\sin(x)| \}$

5. (9 punten) Het rijgedrag van een autobestuurder kan beschreven worden aan de hand van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\dot{v} = a(v - 90)$$

Hier is  $v$  de snelheid van de wagen, en  $\dot{v}$  de versnelling. Het is dus de bedoeling dat de chauffeur 90 km/u rijdt.

(a) Bepaal aan de hand van de Laplace transformatie het verloop van de snelheid  $v(t)$  als functie van de constante  $a$  en de beginsnelheid  $v(0) = v_0$ .

(b) Schets en bespreek het rijgedrag voor  $a = 1$ ,  $a = -1$ ,  $a = \pi i$  en  $a = \pi i - 1$ . Hierbij mag je de beginsnelheid  $v(0) = v_0 = 100$  km/u nemen. En wat gebeurt er als de beginsnelheid  $v(0) = 80$  km/u? Motiveer je antwoord.