Vrije Universiteit Brussel

2^{de} Bachelor IR
2^{de} Bachelor Fysica

14 januari 2013

Er worden **4 vragen** gesteld. Vul op ieder blad je naam in. Motiveer of bewijs iedere uitspraak. Los alle vragen op, op een apart blad! Het examen duurt 2u30.
Veel succes!

1. Bereken alle oplossingen in $\mathbb{C}$:
   (a) (4 punten) $z^3 = \tan\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2i}{i-1}\right)^{1/i} + \operatorname{Ln}\sqrt{2}^{\,i}\right)$
   (b) (6 punten) $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

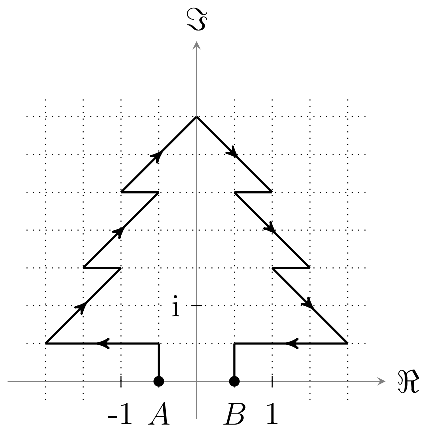
2. (10 punten) Ontwikkel $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z+1}$ in een Laurentreeks die convergent is voor $4 < |z-3|$

   Hint : $\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2-z}\right)$

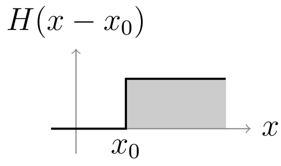
3. (20 punten) Gegeven de complexe functie

$$f(z) = \frac{(z^4+4)z^3(z^2+4)}{\cosh(\pi z) - 1}$$

   (a) Klasseer alle nulpunten van teller en noemer
   (b) Bereken aan de hand van de residustelling de lijnintegraal $\int_A^B f(z)\, dz$ over de gegeven kerstboom-kromme



4. Een alternatieve manier om samengestelde functies te beschrijven maakt gebruik van de Heaviside functie of trapfunctie $H(x - x_0)$.



zo is $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ equivalent met $f(x) = x^2 H(x - 0)$.

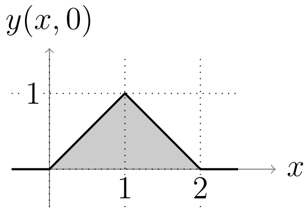
Een interessante eigenschap van de Heaviside functie is dat ze de (onbepaalde) integraal als volgt beïnvloedt:

$$\int f(x)H(x - x_0)\, dx = \left[\int f(y)\, dy \right]_{x_0}^{x}$$

(a) (15 punten) Maak gebruik van de stapfunctie en de Laplace transformatie om de volgende partiële differentiaalvergelijking op te lossen naar $y(x, t)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Gegeven de beginvoorwaarde $y(x, 0)$ zoals aangegeven op Figuur 1



Figuur 1: Initiële conditie voor de partiële differentiaalvergelijking. We willen weten hoe deze uitwijking zal evolueren over de tijd.

(b) (5 punten) De gegeven partiële differentiaalvergelijking is ook gekend als de transportvergelijking. Kan je verklaren waarom? Bespreek je oplossing en schets $y(x, t)$ op twee verschillende tijdstippen.

Antwoorden

Vraag 1

a) $z^3 = \tan\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{2i}{i-1}\right)^{\frac{1}{i}} + \mathrm{Ln}\sqrt{2}^i\right)$

$$\frac{2i}{i-1} = \frac{2i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = \frac{2-2i}{1+1} = 1-i$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Ln}\left(\frac{2i}{i-1}\right)^{\frac{1}{i}} + \mathrm{Ln}\sqrt{2}^i = \frac{1}{i}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{2i}{i-1}\right) - \mathrm{Ln}\sqrt{2}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{i}\left[\mathrm{Ln}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] = -\frac{\cancel{i}}{\cancel{i}}\frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \quad \tan\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{2i}{i-1}\right)^{\frac{1}{i}} + \mathrm{Ln}\sqrt{2}^i\right) = \tan -\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\rightarrow \quad z^3 = -1 = e^{\pi i}e^{2k\pi i} \Leftrightarrow z = e^{\frac{\pi i}{3}}e^{\frac{2k\pi i}{3}} = \left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right\}$$

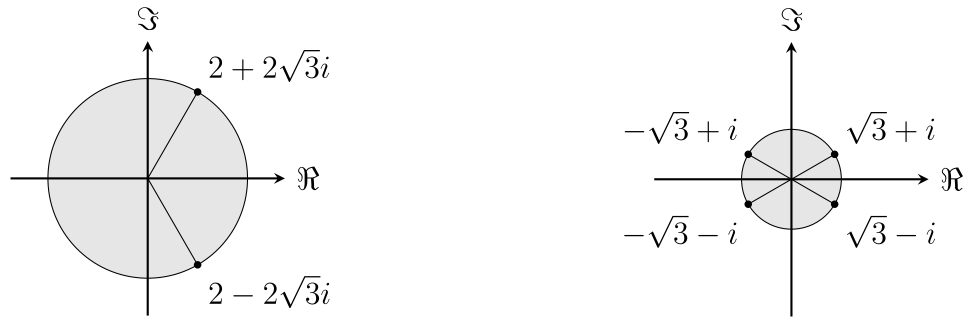
b) $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

$$D = (-4)^2 - 4\cdot 16\cdot 1 = 16 - 4\cdot 16 = -3\cdot 16$$

$$\sqrt{D} = \pm 4\sqrt{3}i$$

$$z^2 = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}i}{2\cdot 1} = 2\left(1 \pm \sqrt{3}i\right) = 4e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

$$z = \pm 2e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{3} \pm i$$



(a) z^2 (b) z

Figuur 2: Een vierdegraads vergelijking heeft vier oplossingen.

Vraag 2

Ontwikkel $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2} + \dfrac{1}{z+1}$ in een Laurentreeks die convergent is voor $4 < |z-3|$

Hint : $\dfrac{1}{(z-2)^2} = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{2-z}\right)$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{-1}{1+z-3} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{z-3}+1}$$

$$= \frac{1}{z-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{-1}{z-3}\right)^n \qquad \left|\frac{1}{z-3}\right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-3)^{-n-1} \qquad 1 < |z-3|$$

$$\frac{1}{(z-2)}^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2-z}\right)$$

$$= -\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-3)^{-n-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-n-1)(z-3)^{-n-2} \qquad 1 < |z-3|$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{-1}{z-3+4} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{z-3}}$$

$$= \frac{1}{z-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{z-3}\right)^n \qquad \left|\frac{4}{z-3}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (z-3)^{-n-1} \qquad 4 < |z-3|$$

$$\to f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-n-1)(z-3)^{-n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (z-3)^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} (-n-1)(z-3)^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^{n-1} (z-3)^{-n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} (-n-1)(z-3)^{-n} + \sum_{n=2}^{\infty} (-4)^{n-1} (z-3)^{-n} + \frac{1}{z-3}$$

$$= \frac{1}{z-3} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \Big((-n-1) + 4^{n-1}\Big)(z-3)^{-n}$$

$$= \frac{1}{z-3} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n-1} \Big(n-1+4^{-(n+1)}\Big)(z-3)^n \qquad 4 < |z-3|$$

Opmerking : de coëfficiënten van de Laurentreeks worden steeds groter voor grotere $|n|$. We vragen dan ook een moeilijke benadering: we ontwikkelen een reeks rond $z = 3$ die voor het gebied $4 < |z-3| = \{-\infty \ldots -1, 7 \ldots \infty\}$ moet gelden.