Vrije Universiteit Brussel

$2^{de}$ Bachelor IR
$2^{de}$ Bachelor Fysica

26 augustus 2015

Er worden **4 vragen** gesteld. Vul op ieder blad je naam in. Motiveer of bewijs iedere uitspraak. Los alle vragen op, op een apart blad! Het examen duurt 2u30.
Veel succes!

1. (5 punten) Bereken alle oplossingen in $\mathbb{C}$:

$$-z^2 + (3+i)z + (4-4i) = 0.$$

2. (15 punten) Gegeven de functie met voorschrift

$$f(z) = \frac{z+1}{z^4 - 13z^3 + 57z^2 - 99z + 54}$$

   (a) Bepaal de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = 3$.

   (b) Bepaal ook de convergentiestraal en het residu van $f(z)$ in $z = 3$.

   (c) Wat is het verschil tussen een Laurentreeks en een Taylorreeks? Wanneer gebruik je welke machtreeks? Bespreek je antwoord op (a) in deze context.

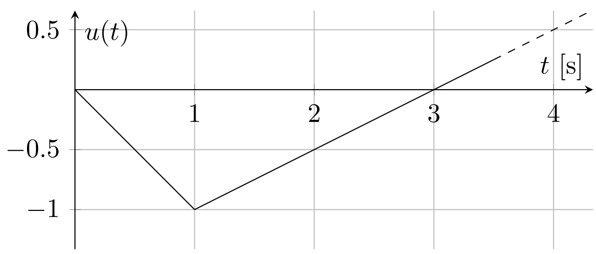
3. (20 punten) Bereken de volgende integraal met behulp van de residustelling

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x) + \sin(\pi x)}{(x+1)(x^4-1)} dx.$$

4. (20 punten) Los de volgende differentiaalvergelijking op met behulp van de Laplace transformatie

$$t\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + ty(t) = u(t)$$

gegeven de randvoorwaarde $y(0) = 0$. De functie $u(t)$ wordt beschreven door de volgende grafiek:




Beschrijf je oplossing kwalitatief. Wat gebeurt er rond $t = 0$ en op $t = \infty$?

# Antwoorden

## Vraag 1 : Complex rekenen

Het oplossen van een tweedegraadsvergelijking gebeurt meestal aan de hand van de *abc*-formule

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$
$$\rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Vullen we de gegeven waarden in, dan vinden we dat de discriminant gelijk is aan

$$D = b^2 - 4ac = (3+i)^2 - 4(-1)(4-4i) = (9 + 6i - 1) + (16 - 16i) = 24 - 10i$$

De hele moeilijkheid van de oefening is het trekken van de complexe wortel $\sqrt{D}$. Omzetten naar polaire vorm is moeilijk, want de hoek is behoorlijk vreemd. Een wortel trekken kan echter ook op een andere manier. Stel

$$\begin{aligned} x^2 &= (a+bi)^2 = D \\ &= (a^2 - b^2) + 2abi = 24 - 10i \end{aligned}$$

Als we het reële en het imaginaire deel van deze vergelijking aan elkaar gelijkstellen, krijgen we een stelsel

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 24 \\ 2ab & = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 & = 24 \\ a & = -{}^5\!/_b \\ b & = -{}^5\!/_a \end{cases} \rightarrow\ a^2 - {}^{25}\!/_{a^2} = 24\ \rightarrow\ a^4 - 24a^2 - 25 = 0$$

Na de substitutie $y = a^2$ bekomen we weer een tweedegraadsvergelijking. We passen weer de *abc*-regel toe, en vinden

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-25)}}{2} \\ &= 12 \pm \sqrt{12^2 + 25} = 12 \pm \sqrt{144 + 25} = 12 \pm \sqrt{169} = 12 \pm 13 \\ y_{1,2} &= \{-1, 25\} \end{aligned}$$

Dit betekent dat we 4 mogelijke waarden voor $a$ vinden: $a_{1,2,3,4} = \{\pm i, \pm 5\}$. Merk op dat $a$ en $b$ reële getallen zijn, waardoor we vinden dat

$$x = \pm\sqrt{D} = \pm(5 - i)$$

Invullen in $z_{1,2}$ geeft

$$z_{1,2} = \frac{-(3+i) \pm (5-i)}{-2} = \{4, -1 + i\}$$

Ter controle kan je de bekomen oplossingen invullen in de complexe tweedegraadsvergelijking. Dan vind je inderdaad dat het resultaat nul is.

## Vraag 2 : Machtreeksen

Eerst moeten we de nulpunten van de noemer vinden. We gebruiken hiervoor de methode van Horner/Ruffini

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+1}{z^4 - 13z^3 + 57z^2 - 99z + 54} \\ &= \frac{z+1}{(z-1)(z-3)^2(z-6)} \end{aligned}$$

### (a) Bepaal de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = 3$

Breng het deel dat juist is eerst naar voren, en manipuleer de andere termen zodat ze machtreeksen in $(z-3)$ voortbrengen (zoals in 3.4 in de oefenzitting).

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-3)^2} \left( \frac{z+1}{(z-1)(z-6)} \right) \\ &= \frac{1}{(z-3)^2} \left( \frac{7}{5} \frac{1}{z-6} - \frac{2}{5} \frac{1}{z-1} \right) \\ &= \frac{1}{(z-3)^2} \left( -\frac{7}{15} \frac{1}{1 + \frac{(z-3)}{-3}} - \frac{2}{10} \frac{1}{1 + \frac{(z-3)}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{(z-3)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-7}{15} \left( \frac{z-3}{3} \right)^n - \frac{2}{10} \left( \frac{z-3}{-2} \right)^n \qquad (*) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-7}{15\, 3^n} - \frac{2}{10\, (-2)^n} \right) (z-3)^{(n-2)} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} \left( \frac{-7}{15\, 3^{(n+2)}} + \frac{2}{10\, (-2)^{(n+1)}} \right) (z-3)^n \end{aligned}$$

### (b) Bepaal de convergentiestraal en het residu van $f(z)$ in $z = 3$

De convergentiestraal volgt uit de formule voor de Taylorreeks, die we stiekem gebruikt hebben tijdens stap (*) in (a)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{voor } |z| \leq 1$$

Hierdoor vinden we $\left|\frac{z-3}{3}\right| \leq 1$ en $\left|\frac{z-3}{-2}\right| \leq 1$. De tweede voorwaarde is de meest beperkende, dus is de convergentiestraal $|z-3| \leq 2$.

Voor het residu zoeken we de coëfficiënt van de Laurentreeks die hoort bij de term $(z - 3)^{-1}$. Als de machtreeks in de standaard vorm $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-3)^n$ staat, is dit bij $n = -1$.

$$\text{Res}\,(f, 3) = \frac{-7}{45} + \frac{2}{20} = \frac{-1}{18}$$

**(c) Wat is het verschil tussen een Laurentreeks en een Taylorreeks?**

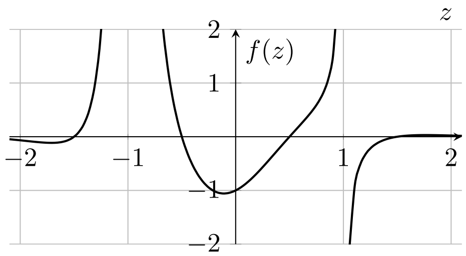
Een algemene Laurentreeks heeft de vorm

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

Een Taylorreeks lijkt hier sterk op, maar hierbij gaat de sommatie van $0 \to \infty$. Merk op dat de coëfficiënten $\alpha_n$ nul mogen zijn, waardoor de eigenlijke grenzen van functie tot functie kunnen verschillen. Specifiek is de ondergrens van de Laurentreeks bepaald door de orde van de singulariteit van het punt $z = a$ waarrond we de machtreeks ontwikkelen. Is dit punt regulier, of een ophefbare singulariteit, dan vinden we een gewone Taylorreeks. Is $z = a$ een pool van orde $p$, dan moet de sommatie gaan over $-p \to \infty$. In het geval van (a) is $z = a = 3$ een pool van orde twee, dus gaat de sommatie van $-2$ tot $\infty$.

## Vraag 2 : residustelling

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x) + \sin(\pi x)}{(x+1)(x^4-1)} dx$$



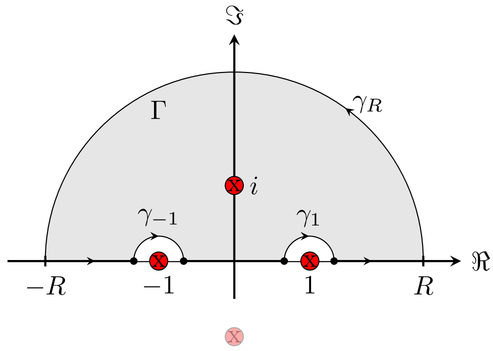

We gaan deze integraal berekenen aan de hand van de complexe analyse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i z}}{(z+1)(z^4-1)}\, dz$$

Deze integrand heeft 4 singuliere punten :

- $z = -1$ is een pool van orde 2
- $z = 1$ is een pool van orde 1
- $z = i$ is een pool van orde 1
- $z = -i$ is een pool van orde 1

Merk op dat de exponentile functie niet meetelt bij het bepalen van de orde van singulariteiten. We kunnen nu de residustelling toepassen, en de oneigenlijke integraal uitrekenen door de complexe kringintegraal te beschouwen over een halve cirkelboog met straal oneindig.




De kringintegraal is de som van zijn lijnintegralen

$$\oint \frac{e^{\pi i z}}{(z+1)(z^4-1)}\,dz = \int_{-R}^{-1-\epsilon} + \int_{\gamma_{-1}} + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} + \int_{\gamma_1} + \int_{1+\epsilon}^{R} + \int_{\gamma_R}$$

Voor de stelling van Gauss hebben we de residu's nodig die binnen en op de contour liggen, zijnde $z = \{-1, 1, i\}$. Via het formularium weten we ook dat de lijnintegraal over de halve cirkelboog met straal oneindig nul is, want de graad van de teller is kleiner dan de graad van de noemer $0 < 5$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z\to i} \frac{e^{i\pi z}}{(z+1)^2(z-1)(z+i)\cancel{(z-i)}}\cancel{(z-i)} \\
&= \frac{e^{-\pi}}{(i+1)^2(i-1)2i} = \frac{1+i}{8}e^{-\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 1) &= \lim_{z\to 1} \frac{e^{i\pi z}}{(z+1)^2\cancel{(z-1)}(z+i)(z-i)}\cancel{(z-1)} \\
&= \frac{e^{-\pi}}{2^2(i-1)(1+i)} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \frac{e^{i\pi z}}{\cancel{(z+1)^2}(z-1)(z+i)(z-i)}\cancel{(z+1)^2} \\
&= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z^2-1)} \\
&= \lim_{z\to -1} \frac{(z-1)(z^2+1)i\pi e^{i\pi z} - e^{i\pi z}\left[(z-1)2z + (z^2+1)\right]}{(z-1)^2(z^2-1)^2} \\
&= \frac{-4\pi i e^{-\pi i} - e^{-\pi i}[4+2]}{44} = \frac{2\pi i + 3}{8}
\end{aligned}$$

Nu kunnen we de integraalvergelijking invullen

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\left(\oint - \int_{\gamma_{-1}} - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_R}\right)\\
&= 2\pi i \mathrm{Res}\,(f,i) - \frac{-1}{2}2\pi i \mathrm{Res}\,(f,-1) - \frac{-1}{2}2\pi i \mathrm{Res}\,(f,1) - 0\\
&= 2\pi i\frac{1+i}{8}e^{-\pi} + \pi i\left(\frac{2\pi i+3}{8} - \frac{1}{8}\right)\\
&= \frac{\pi}{8}\Big((2i-2)e^{-\pi} + (-2\pi+2i)\Big)
\end{aligned}$$

De complexe exponentiële kunnen we ontbinden in een reëel en een imaginair gedeelte.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi i z}}{(z+1)(z^4-1)}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z^4-1)}\,dz + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi z)}{(z+1)(z^4-1)}\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)+\sin(\pi x)}{(x+1)(x^4-1)}dx = \Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi i z}}{(z+1)(z^4-1)}\right\} + \Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi i z}}{(z+1)(z^4-1)}\right\}$$

Zo vinden we de gevraagde integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)+\sin(\pi x)}{(x+1)(x^4-1)}dx = \frac{\pi(2-2\pi)}{8}$$

## Vraag 3 : differentiaalvergelijking met veranderlijke coefficienten

### a) Functievoorschrift voor $u(t)$

Er zijn twee manieren om de functie $u(t)$ te beschrijven:

$$u(t) = \begin{cases} -t & 0 \le t < 1 \\ \frac{t}{2} - \frac{3}{2} & 1 \le t \end{cases}$$

of

$$u(t) = -t + \tfrac{3}{2}(t-1)H(t-1)$$

waarbij $H(t)$ de Heaviside of stapfunctie is.

### b) Omzetten van de differentiaalvergelijking naar het Laplace domein

We gebruiken Eigenschap 4 uit het formularium

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^n(s)$$

Toegepast op het gegeven probleem vinden we

$$-\frac{d}{ds}\Big(s^2Y(s) - y(0)s - \dot{y}(0)\Big) + 2\Big(sY(s) - y(0)\Big) - \frac{d}{ds}Y(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{3e^{-s}}{2s^2}$$

$$-\cancel{2sY(s)} - s^2\dot{Y}(s) + y(0) + \cancel{2sY(s)} - 2y(0) - \dot{Y}(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{3e^{-s}}{2s^2}$$

$$(s^2+1)\dot{Y}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{3e^{-s}}{2s^2}$$

### c) Terug transformeren naar het tijdsdomein

Splits in partieelbreuken

$$\dot{Y}(s) = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)\left(1 - \tfrac{3}{2}e^{-s}\right)$$

en pas Eigenschap 4 toe

$$-ty(t) = \big[t - \sin(t)\big] - \tfrac{3}{2}\big[(t-1) - \sin(t-1)\big]H(t-1)$$

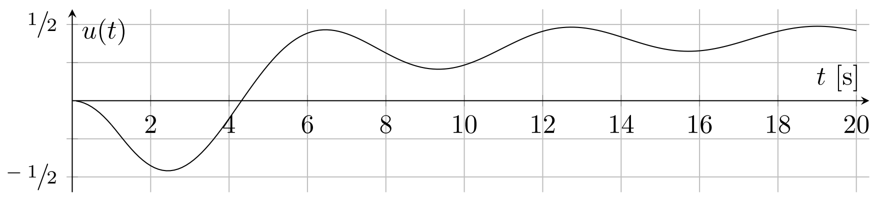
Zo vinden we de oplossing $y(t)$ van de differentiaalvergelijking

$$y(t) = \left[\frac{\sin(t)}{t} - 1\right] + \left[-\tfrac{3}{2}\frac{\sin(t-1)}{t} + \tfrac{3}{2}\frac{t-1}{t}\right]H(t-1)$$

ofwel

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} - 1 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{\sin(t)}{t} - \frac{3}{2}\frac{\sin(t-1)}{t} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2t} & 1 \leq t \end{cases}$$

Er werd ook gevraagd om de oplossing kwalitatief te bespreken. Hieronder is een schets van $y(t)$.




De randvoorwaarde was $y(0) = 0$, en die blijkt al zeker te kloppen. Hierna begint $y(t)$ te oscilleren, maar de trilling dempt uit, omwille van de deling door $t$. Voor $t = \infty$ blijft er alleen de constante $\frac{1}{2}$ over. We zien inderdaad dat de plot hiernaar convergeert.