Vrije Universiteit Brussel

2^{de} Bachelor IR
2^{de} Bachelor Fysica

13 januari 2014

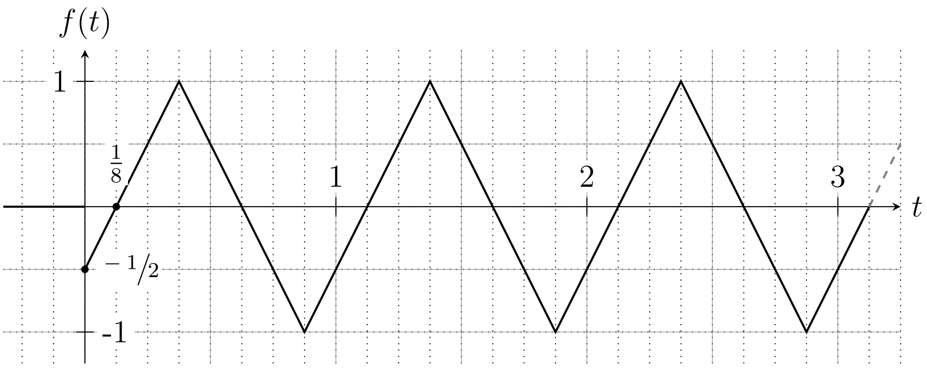
Er worden **5 vragen** gesteld. Vul op ieder blad je naam in. Motiveer of bewijs iedere uitspraak. Los alle vragen op, op een apart blad! Het examen duurt 2u30. Veel succes!

1. Bereken alle oplossingen in $\mathbb{C}$:
   (a) (5 punten) $z = \left| \tan \left(i \,\mathrm{Ln} \left(\frac{-1-i}{1-i} \right)^{2/3} \right) \right|$
   (b) (4 punten) $\cos(z) = -2$

2. (9 punten) Gegeven de volgende functie
$$f(z) = (z-2)\,\mathrm{cotg}(\pi z) + \exp \frac{z-1}{z^2-9}$$
   (a) Bepaal en klasseer de singuliere punten van $f(z)$. Motiveer je antwoord.
   (b) Bepaal de convergentiestraal van de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = 3/2$.
   (c) Als je de Laurentreeks zou schrijven als $\sum a_n (z - 3/2)^n$, welke grenzen kan je dan verwachten voor n? Waarom?

3. (18 punten) Los de volgende integraal op via de complexe analyse:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x) + \cos(\pi x)}{x(x^2-1)}\, dx$$

4. (12 punten) Bereken de Laplace getransformeerde van de driehoeksgolf functie



5. (a) (6 punten) Los de differentiaalvergelijking $\ddot{x}(t) + x(t) = 1 + \cos(\omega t)$ op voor $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ met behulp van de Laplace transformatie. Beschouw specifiek de twee gevallen waar $\omega = 1$ en $\omega = 1.05$.
   (b) (6 punten) Gebruik complexe analyse om een som-naar-product regel van Simpson af te leiden voor $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$. Gebruik deze formule om je bekomen oplossingen te schetsen en te interpreteren. Wat gebeurt er voor $t \to \infty$?

Antwoorden

Vraag 1

a) $z = \left| \tan\left(i \operatorname{Ln}\left(\frac{-1-i}{1-i}\right)^{2/3} \right) \right| = \left| \tan\left(\frac{2}{3} i \operatorname{Ln}\left(\frac{-1-i}{1-i}\right) \right) \right|$

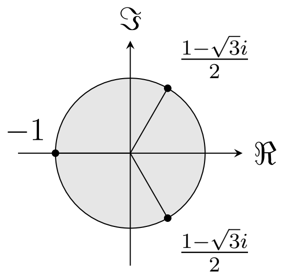
$$\rightarrow \quad \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{3} i \operatorname{Ln}\left(\frac{-1-i}{1-i}\right) = \frac{2}{3} i \operatorname{Ln}(-i) = \frac{2}{3} i \operatorname{Ln}\left(e^{-\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i}\right)$$

$$= \frac{2}{3} i \left(-\frac{\pi}{2} i + 2k\pi i\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} k' \pi = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}, \frac{9\pi}{3} = \pi \right\}$$

$$\rightarrow \quad \left| \tan\left(\frac{2}{3} i \operatorname{Ln}\left(\frac{-1-i}{1-i}\right) \right) \right| = \left| \tan\left\{ \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi \right\} \right| = \left| \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi\right\}}{\cos\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi\right\}} \right| = \left| \frac{\Im\left(e^{\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi\right\}}\right)}{\Re\left(e^{\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi\right\}}\right)} \right|$$

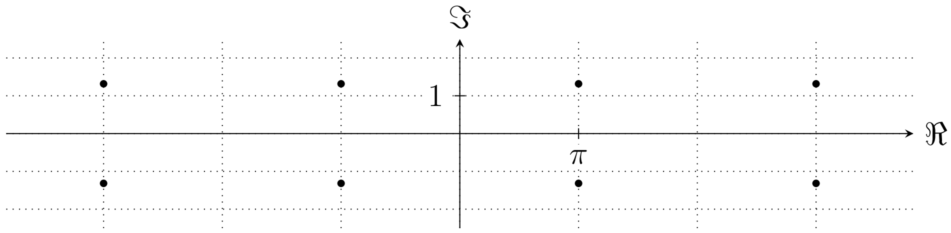
$$\rightarrow \quad z = \left| \left\{ \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}, \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}, \frac{0}{-1} \right\} \right| = \left| \left\{ \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0 \right\} \right| = \left\{ \sqrt{3}, 0 \right\}$$



b) $\cos(z) = -2$

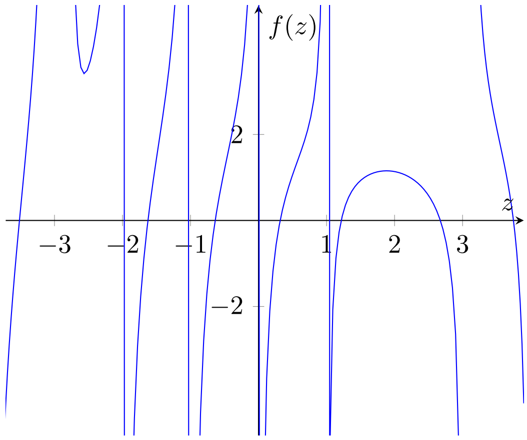
$$\begin{aligned}
\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= -2 \\
e^{iz} + e^{-iz} + 4 &= 0 \\
e^{2iz} + 1 + 4e^{iz} &= 0 \\
y^2 + 4y + 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{iz} = y &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} \\
&= -2 \pm \sqrt{4 - 1} \\
&= -2 \pm \sqrt{3} \\
iz + 2k\pi i &= \ln\left(-2 \pm \sqrt{3}\right) \\
&= \ln\left((2 \mp \sqrt{3})e^{\pi i}\right) \\
&= \pi i + \ln\left(2 \mp \sqrt{3}\right) \\
z &= (2k' + 1)\pi - i \ln\left(2 \mp \sqrt{3}\right) \\
z &= (2k' + 1)\pi \pm i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$



Vraag 2

a) Klasseer de singuliere punten van $f(z) = (z-2)\,\mathrm{cotg}(\pi z) + \exp\frac{z-1}{z^2-9}$



$$
\begin{aligned}
f(z) &= (z-2)\,\mathrm{cotg}(\pi z) + \exp\frac{z-1}{z^2-9} \\
&= (z-2)\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + \exp\frac{z-1}{z^2-9}
\end{aligned}
$$

De sinus term in de noemer alleen zorgt voor oneindig veel polen van orde 1 op alle gehele getallen $z = k \in \mathbb{Z}$. In $z = 2$ wordt deze pool echter tegengewerkt door het nulpunt van de term $(z-2)$. We vinden daar dus een ophefbare singulariteit. De nulpunten van de noemer in de exponentiële term $z = \pm 3$ zijn essentiële singulariteiten. We vinden dus in totaal voor $f(z)$

$z = \pm 3$	essentiële singulariteit
$z = 2$	ophefbare singulariteit
$z = \mathbb{Z} \setminus \{-3, 2, 3\}$	polen van orde 1

b) Bepaal de convergentiestraal van de Laurentreeks rond $z = 3/2$

De convergentiestraal kan bepaald worden door de afstand van het punt waarrond we onze reeks ontwikkelen tot de dichtstbijzijnde singulariteit. In dit geval is dat $R = \min_{k\in\mathbb{Z}} |k - 3/2| = |1 - 3/2| = 1/2$. Het convergentiegebied wordt dan $|z - 3/2| < 1/2$

c) Grenzen voor de sommatie

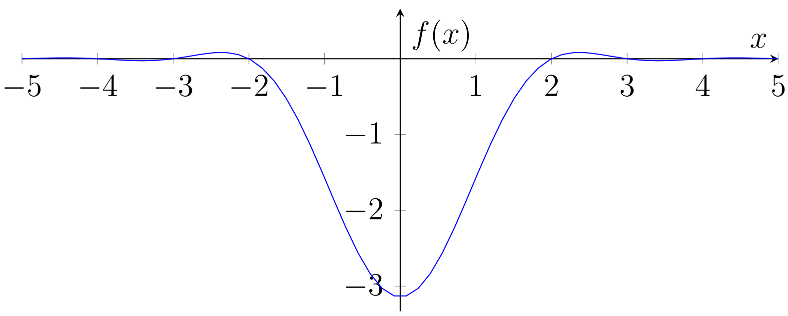
In $z = 3/2$ is er zelf geen singulariteit. We verwachten dus geen hoofdbestanddeel voor de Laurentreeks. De reeksontwikkeling reduceert tot een Taylor reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - 3/2\right)^n$.

Vraag 3 : residustelling

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x) + \cos(\pi x)}{x(x^2-1)}\,dx$$

De term met de cosinus is een oneven functie, dus dit deel van de integraal is identiek gelijk aan nul. De opgave is dus eigenlijk gelijk aan

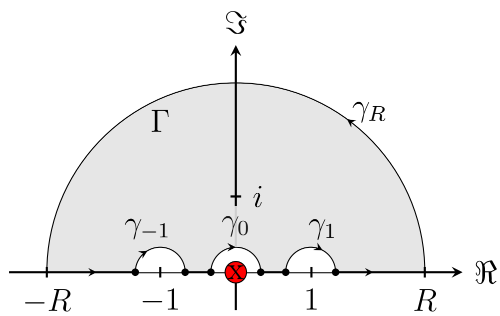
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}\,dx$$



We gaan deze integraal berekenen aan de hand van de complexe analyse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i z}}{z(z^2-1)}\,dz$$

Deze integraal heeft 3 reële polen van orde 1, op $z = 0$ en $z = \pm 1$. We kunnen nu de residustelling toepassen, en de oneigenlijke integraal uitrekenen door de complexe kringintegraal te beschouwen over een halve cirkelboog met straal oneindig.



De kringintegraal is de som van zijn lijnintegralen

$$\oint \frac{e^{i\pi z}}{z(z+1)(z-1)}\,dz = \int_{-R}^{-1-\epsilon} + \int_{\gamma_{-1}} + \int_{-1+\epsilon}^{-\epsilon} + \int_{\gamma_0} + \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} + \int_{\gamma_1} + \int_{1+\epsilon}^{R} + \int_{\gamma_R}$$

Volgens de stelling van Gauss is de kringintegraal gelijk aan nul, want er zijn geen residu's in de contour. We weten ook dat de lijnintegraal over de halve cirkelboog met straal oneindig nul is, want de graad van de teller is kleiner dan de graad van de noemer $0 < 3$.

We bepalen vervolgens de residu's van zijn reële polen

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{-1}} &= -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi i \operatorname{Res}(f,-1) \\
&= -\pi i \lim_{z\to -1} \frac{e^{i\pi z}}{z\cancel{(z+1)}(z-1)}\cancel{(z+1)} \\
&= -\pi i \frac{e^{-\pi i}}{2} = \frac{\pi i}{2} \\
\int_{\gamma_{0}} &= -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi i \operatorname{Res}(f,0) \\
&= -\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{i\pi z}}{\cancel{z}(z+1)(z-1)}\cancel{z} \\
&= -\pi i \frac{1}{-1} = \pi i \\
\int_{\gamma_{1}} &= -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi i \operatorname{Res}(f,1) \\
&= -\pi i \lim_{z\to 1} \frac{e^{i\pi z}}{z(z+1)\cancel{(z-1)}}\cancel{(z-1)} \\
&= -\pi i \frac{e^{\pi i}}{2} = \frac{\pi i}{2}
\end{aligned}$$

Nu kunnen we de integraalvergelijking invullen

$$0 = \int_{-R}^{R} + \frac{\pi i}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{2}$$

En daaruit kunnen we de gevraagde oneigenlijke integraal berekenen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}\, dx = \Im\Big\{ -2\pi i \Big\} = -2\pi$$

Vraag 4 : Laplace getransformeerde

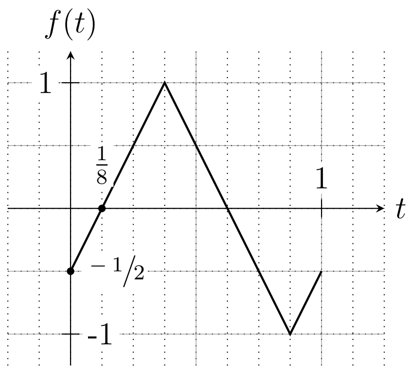
We gebruiken de definitie van de Laplace transformatie om de integraal uit te rekenen

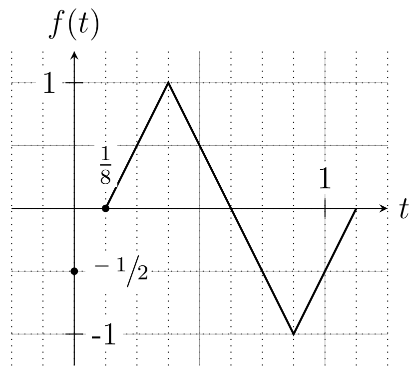
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

Vervolgens merken we nog op dat de gegeven functie periodiek is, met periode $T = 1$. Volgens eigenschap 9 vinden we dan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt\\ &= \frac{1}{1-e^{-p}}\int_0^1 f(t)e^{-pt}\,dt\end{aligned}$$

Er zijn verschillende manieren om deze integraal uit te rekenen, maar het resultaat is telkens hetzelfde.





$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\{f(t)_{\text{één periode}}\}\\ &\quad= \int_0^{3/8} \Big(4t - {}^1\!/\!_2\Big)e^{-pt}\\ &\qquad+ \int_{3/8}^{7/8} -\Big(4(t - {}^3\!/\!_8) - 1\Big)e^{-pt}\\ &\qquad+ \int_{7/8}^{1} -\Big(4(t - {}^7\!/\!_8) - 1\Big)e^{-pt}\\ &\quad= \int_0^{3/8} \Big(4t - {}^1\!/\!_2\Big)e^{-pt} + \int_{3/8}^{7/8}\Big(-4t + {}^{20}\!/\!_8\Big)e^{-pt} + \int_{7/8}^{1} -\Big(4t - {}^{36}\!/\!_8\Big)e^{-pt}\end{aligned}$$

Nu passen we partiële integratie toe. In dit geval komt het erop neer dat

$$\int_a^b f\dot{g} = [fg]_a^b - \int_a^b \dot{f}g$$

$$\int_a^b te^{-pt} = \left[\frac{te^{-pt}}{-p}\right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{-pt}}{-p} = -\left[\frac{te^{-pt}}{p}\right]_a^b - \left[\frac{e^{-pt}}{p^2}\right]_a^b$$

We kunnen zo de aparte termen uitrekenen

$$\begin{aligned}
\int_0^{3/8} 4te^{-pt} - \tfrac{1}{2}e^{-pt} &= \left[-4\frac{te^{-pt}}{p} - 4\frac{e^{-pt}}{p^2} + \tfrac{1}{2}\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{3/8} \\
&= -4\frac{\frac{3}{8}e^{-\frac{3}{8}p}}{p} - 4\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p^2} + \tfrac{1}{2}\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p} + 4\frac{0}{p} + 4\frac{1}{p^2} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{3/8}^{7/8} -4te^{-pt} + \tfrac{5}{2}e^{-pt} &= \left[4\frac{te^{-pt}}{p} + 4\frac{e^{-pt}}{p^2} - \tfrac{5}{2}\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{3/8}^{7/8} \\
&= 4\frac{\frac{7}{8}e^{-\frac{7}{8}p}}{p} + 4\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p^2} + \tfrac{5}{2}\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p} - 4\frac{\frac{3}{8}e^{-\frac{3}{8}p}}{p} - 4\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p^2} + \tfrac{5}{2}\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{7/8}^{1} 4te^{-pt} - \tfrac{9}{2}e^{-pt} &= \left[-4\frac{te^{-pt}}{p} - 4\frac{e^{-pt}}{p^2} + \tfrac{9}{2}\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{7/8}^{1} \\
&= -4\frac{e^{-p}}{p} - 4\frac{e^{-p}}{p^2} + \tfrac{9}{2}\frac{e^{-p}}{p} + 4\frac{\frac{7}{8}e^{-\frac{7}{8}p}}{p} + 4\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p^2} + \tfrac{9}{2}\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p}
\end{aligned}$$

Als we alle termen optellen, vallen er een deel weg. De overschot is de Laplace getransformeerde van één enkele periode.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(t)e^{-pt}\,dt \\
&= \cancel{-\tfrac{3}{2}\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p}} - 4\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p^2} + \cancel{\tfrac{1}{2}\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p}} + 4\frac{1}{p^2} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{p} \\
&\quad + \cancel{\tfrac{7}{2}\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p}} + 4\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p^2} - \cancel{\tfrac{5}{2}\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p}} - \cancel{\tfrac{3}{2}\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p}} - 4\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p^2} + \cancel{\tfrac{5}{2}\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p}} \\
&\quad - 4\frac{e^{-p}}{p} - 4\frac{e^{-p}}{p^2} + \tfrac{9}{2}\frac{e^{-p}}{p} + \cancel{\tfrac{7}{2}\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p}} + 4\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p^2} - \cancel{\tfrac{9}{2}\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p}} \\
&= 4\frac{1}{p^2} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{p} - 8\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p^2} + 8\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p^2} - 4\frac{e^{-p}}{p^2} + \tfrac{1}{2}\frac{e^{-p}}{p}
\end{aligned}$$

Inderdaad, als we dit invers Laplace transformeren, krijgen we terug het gegeven figuurtje. Herinner dat $e^{-ap}F(p)$ een verschoven versie van $f(t)$ geeft, namelijk $f(t-a)H(t-a)$.

Ten slotte brengen we nog in rekening dat de functie periodiek is.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-p}}\int_0^1 f(t)e^{-pt}\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-p}}\left(4\frac{1}{p^2} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{p} - 8\frac{e^{-\frac{3}{8}p}}{p^2} + 8\frac{e^{-\frac{7}{8}p}}{p^2} - 4\frac{e^{-p}}{p^2} + \tfrac{1}{2}\frac{e^{-p}}{p}\right)
\end{aligned}$$

Vraag 5 : Ordinaire differentiaalvergelijking

a) Oplossen van de differentiaalvergelijking

De gegeven differentiaalvergelijking

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \cos(\omega t)$$

heeft constante coëfficiënten, en laat zich dus gemakkelijk omzetten naar het Laplace domein. Immers,

$$x(t) \to X(p)$$
$$\dot{x}(t) \to pX(p) - x(0)$$
$$\ddot{x}(t) \to p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0)$$

Zo wordt de Laplace getransformeerde vergelijking

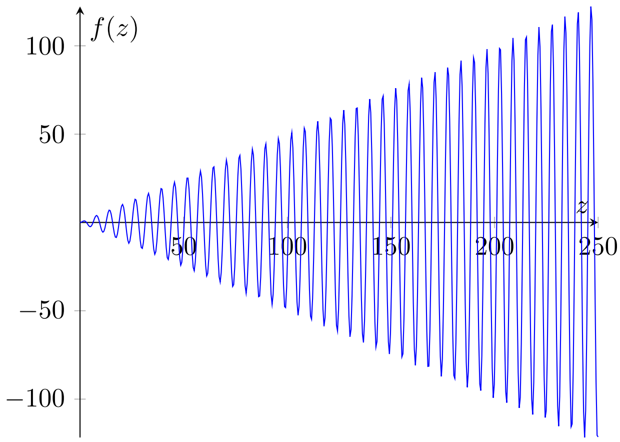
$$\begin{aligned} p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + X(p) &= \frac{p}{p^2 + w^2} \\ (p^2 + 1)X(p) &= \frac{p}{p^2 + w^2} \\ X(p) &= \frac{p}{(p^2 + w^2)(p^2 + 1)} \end{aligned}$$

Het geval $\omega = 1$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

Deze term kan rechtstreeks omgezet worden via de tabel.

$$x(t) = \frac{1}{2} t \sin(t)$$



Voor $\omega = 1$ zal $x(t)$ voor $t \to \infty$ naar oneindig gaan. We hebben de eigenfrequentie aangeslagen. Zonder demping zal ons systeem uiteindelijk bezwijken.

Het geval $\omega = 1.05$

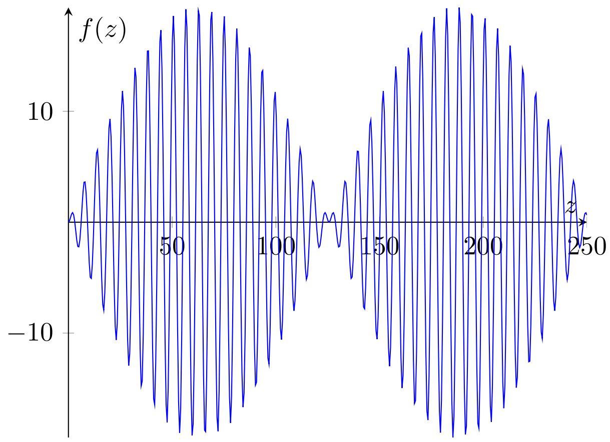
$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1.05^2)(p^2+1)}$$

Deze term kunnen we opsplitsen in partieelbreuken, of via de tabel werken

$$\frac{1}{(p^2+1.05^2)(p^2+1)} = \frac{Ap+B}{(p^2+1.05^2)} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = A(p^3+p) + B(p^2+1) + C(p^3+1.05^2p) + D(p^2+1.05^2)$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 1 &= A+1.05^2C \\ 0 &= B+1.05^2D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 &= -C+1.05^2C \\ 0 &= 1.05^2D-D \\ A &= -C \\ B &= -D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C &= \dfrac{1}{1.05^2-1} \\ D &= 0 \\ A &= -\dfrac{1}{1.05^2-1} \\ B &= 0 \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{1}{1.05^2-1}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1.05^2}\right)$$
$$x(t) = \frac{1}{1.05^2-1}\Big(\cos(t) - \cos(1.05^2t)\Big)$$



b) Interpretatie

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) - \cos(a-b) &= \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2} - \frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2} \\
&= \frac{e^{ia}e^{ib}+e^{-ia}e^{-ib}-e^{ia}e^{-ib}-e^{-ia}e^{ib}}{2} \\
&= \frac{e^{ia}\left(e^{ib}-e^{-ib}\right)+e^{-ia}\left(e^{-ib}-e^{ib}\right)}{2} \\
&= \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}2i^2 \\
&= -2\sin(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Nu moeten we deze “nieuwe”regel toepassen op de gevonden oplossing.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{1.05^2 - 1}\Big(\cos(t) - \cos(1.05^2 t)\Big) \\
& \begin{cases} a + b & = 1 \\ a - b & = 1.05 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b & = 1 - a \\ a - 1 + a & = 1.05 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a & = 2.05 \\ a & = 1.025 \\ b & = -0.025 \end{cases} \\
&= \frac{-2}{1.05^2 - 1} \sin(1.025t) \sin(-0.025t) \\
&= \frac{2}{1.05^2 - 1} \sin(1.025t) \sin(0.025t)
\end{aligned}
$$

We vinden dus dat de tweede opgave een amplitude gemoduleerde sinus oplevert.