VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL 27 augustus 2014

Theorie-examen

Complexe Analyse

Tweede Bachelor Ingenieurswetenschappen en verkorte programma's
Tweede Bachelor Fysica

N.B.: Gelieve op elk blad goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Begin elke vraag op een nieuw blad. Dit deel van het examen duurt 75 minuten. Elke vraag staat op 10 punten. Argumenteer kort en duidelijk!

---

1. Neem een domein $D \subset \mathbb{C}$ en een rij functies (f_n), met $f_n : \ D \to \mathbb{C}$.

   (a) Definieer het begrip *uniforme convergentie* voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

   (b) Beschouw een stuksgewijs continu differentieerbare kromme C binnen D gelegen. Onderstel dat de functies f_n continu zijn binnen D en dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergeert naar s over D. Bewijs dat

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)\mathrm{d}z = \int_C s(z)\mathrm{d}z.$$

   Duid in je bewijs goed aan waar je de hypotheses of voorwaarden van deze stelling gebruikt.

2. (a) Leg uit hoe je met de residustelling integralen van de vorm

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x$$

   kan uitrekenen, waarbij p en q twee reële veeltermen zijn.

   (b) Formuleer expliciet de voorwaarden die nodig zijn om bovenstaande techniek te kunnen toepassen en duid aan waar je ze gebruikt.

   (c) Bewijs een algemene formule voor

   $$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Bewijs dat als f begrensd en integreerbaar is, dan is

   $$\lim_{A \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin Ax \ \mathrm{d}x = 0.$$