Vrije Universiteit Brussel 13 januari 2014

Theorie-examen

Complexe Analyse

Tweede Bachelor Ingenieurswetenschappen en verkorte programma's
Tweede Bachelor Fysica

N.B.: Gelieve op elk blad goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Begin elke vraag op een nieuw blad. Dit deel van het examen duurt 75 minuten. Elke vraag staat op 10 punten. Argumenteer kort en duidelijk!

---

1. Zij $D_1 \subset \mathbb{C}$ een enkelvoudig samenhangend domein, en $\phi: \ D_1 \to \mathbb{C}$ een analytische functie. We onderstellen dat ϕ de verzameling D_1 omzet in een enkelvoudig samenhangend domein $D_2 \subset \mathbb{C}$. Als $w_1, w_2 \in D_1$, en $\phi(w_1) = z_1, \ \phi(w_2) = z_2$, en $f: \ D_2 \to \mathbb{C}$ analytisch, dan geldt
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{w_1}^{w_2} f(\phi(w))\phi'(w)\mathrm{d}w.$$
Bewijs dit en duid aan waar je de gegeven voorwaarden gebruikt.

2. Gegeven is een functie $f\colon \mathbb{R}^+ \times [b, b'] \to \mathbb{R}$ die gebiedsgewijs continu is.
   (a) Definieer de *uniforme convergentie* van de integraal
   $$\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$$
   over $[b, b']$ naar een functie $g(x)$.
   (b) Geef en bewijs een equivalente voorwaarde voor convergentie van deze oneigenlijke integraal waar de uniforme limiet $g(x)$ niet in voorkomt.
   (c) Gebruik de vorige stelling om te bewijzen dat het bestaan van een stuksgewijs continue functie $\mu: \ [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ met $\int_0^{+\infty} \mu(t)\mathrm{d}t$ convergent zodanig dat voor elke $x \in [b, b']$, en voor $t > t_0$ geldt dat $|f(t,x)| \leq \mu(t)$, de uniforme convergentie van $\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ over $[b, b']$ impliceert.

3. (a) Definieer de *Z-getransformeerde* van een numerieke rij (r_n).
   (b) Leg uit hoe je uit de Z-getransformeerde $F(z)$ van een rij (f_n) het element f_n kan terugvinden d.m.v. een kringintegraal.
   (c) Gegeven zijn twee rijen (f_n) en (g_n). Onderstel dat $\mathcal{Z}\{f_n\}$ en $\mathcal{Z}\{g_n\}$ respectievelijk bestaan voor $|z| > r$ en $|z| > r'$. Geef dan een formule voor $\mathcal{Z}\{f_n g_n\}$. Bewijs de formule en bespreek de convergentie.