Vrije Universiteit Brussel 12 januari 2015

Theorie-examen

Complexe Analyse

Tweede Bachelor Ingenieurswetenschappen en verkorte programma's
Tweede Bachelor Fysica

N.B.: Gelieve op elk blad goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Begin elke vraag op een nieuw blad. Dit deel van het examen duurt 75 minuten. Elke vraag staat op 10 punten. Argumenteer kort en duidelijk!

---

1. (a) Definieer de complexe logaritme Ln en toon aan dat deze analytisch is op zijn domein.

   (b) Bepaal ook de afgeleide van Ln.

   (c) Kan de logaritme analytisch voortgezet worden tot het hele vlak? Leg uit.

2. Onderstel dat $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is in het punt a. Dan bestaat er een open schijf S met middelpunt a waarop f kan geschreven worden als een machtreeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C+} \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{(w-a)^{n+1}},$$

   voor een cirkel C met middelpunt a en straal r die binnen S ligt.

   Stel m_r de maximale waarde die f bereikt op C. Bewijs dat $|a_n| \leq \frac{m_r}{r^n}$.

3. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stuksgewijs continu, met $f(t) = 0$ voor $t < 0$ en van exponentiële orde.

   (a) Geef de definitie van *exponentiële orde* en van de *Laplacegetransformeerde* $\mathcal{L}\{f(t)\}$ in $p \in \mathbb{C}$.

   (b) Beschouw nu enkel $p \in \mathbb{R}$. Wat kan je zeggen over $\lim_{p\to+\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}$? Geef een bewijs.

   (c) Leid uit het voorgaande af dat er geen functie bestaat waarvan de Laplacegetransformeerde de constante functie 1 is. Men lost dit probleem op door *distributies* in te voeren. Leg dit uit.

   (d) Bewijs de *zifteigenschap* voor de Dirac distributie δ en voor δ'.