Vrije Universiteit Brussel 25 januari 2011

Oefeningenexamen

Lineaire Algebra

Eerste Bachelor Ingenieurswetenschappen en verkorte programma's

N.B.: Gelieve op elk blad goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Begin elke vraag op een nieuw blad. Dit deel van het examen duurt 240 minuten. Verklaar elke stap!

---

1. Onderstel dat U en W deelruimten zijn van $\mathbb{R}^9$ en beiden dimensie 5 hebben. Bewijs dat $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$.

2. Zijn volgende beweringen juist of fout? Verklaar telkens je antwoord; indien de bewering juist is: bewijs, zo niet: geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Onderstel dat $\vec{x}$ en $\vec{y}$ twee verschillende vectoren van $\mathbb{R}^n$ zijn, die beiden norm 1 hebben (voor het standaardinproduct $\cdot$ op $\mathbb{R}^n$, waarbij $n \geq 2$) en waarvoor bovendien geldt dat $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = 1$. Dan zijn $\vec{x}$ en $\vec{y}$ steeds lineair onafhankelijk.

   (b) Volgende afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definieert een Hilbert inwendig product op $\mathbb{C}^2$:
   $$\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = z_1 \overline{w_2} + z_2 \overline{w_1},$$
   waarbij $\vec{z} = (z_1, z_2)$ en $\vec{w} = (w_1, w_2)$.

   (c) Beschouw de volgende lineaire afbeelding f:
   $$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}[X] : (z_1, z_2) \mapsto \overline{z_1}(1 + iX) + z_2(X^2 - i).$$
   Dan is $\dim_{\mathbb{C}}(Ker(f)) = 0$ en $\dim_{\mathbb{C}}(Im(f)) = 2$.

3. Beschouw een lineaire afbeelding $f : V \to V$. Onderstel dat $V = W \oplus W'$, waarbij W en W' invariant zijn onder f (dwz $f(W) \subset W$ en $f(W') \subset W'$). Onderstel bovendien dat $\dim(W) = n$ en $\dim(W') = m$. Bewijs dat we een basis van V kunnen vinden zodanig dat de matrix van f ten opzichte van deze basis er als volgt uitziet:
   $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
   waarbij $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$, $B \in M_{mm}(\mathbb{K})$ en 0 een nulmatrix voorstelt.

4. Herleid de volgende kwadriek naar zijn Euclidische standaardvergelijking. Beschrijf de coördinatentransformaties die nodig zijn om tot deze standaardvergelijking te komen. Bepaal de aard van de kwadriek. Orden de eigenwaarden van klein naar groot, met eventuele nullen achteraan.
   $$x^2 + 8y^2 + z^2 + 2xz - 16x + 16y + 16z = -8$$

5. (a) Beschrijf de isometrie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door
   $$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Gebruik dit resultaat om de eerste coördinatentransformatie uit opgave 4 te bespreken.

Puntenverdeling: 2 - 7 - 3 - 4 - 4. Veel succes!