Vrije Universiteit Brussel
Faculteit Ingenieurswetenschappen
1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen

Examen Lineaire Algebra

1ste zittijd
24 januari 2012

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam en groep te schrijven en goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Beschouw de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ waarvoor geldt dat $f(3X^2 - 1) = 6X^2 + 2$, $f(X - 2) = 6X^2 - 9X + 1$ en $f(X) = 6X^2 + 9X + 3$.

   (a) Bepaal de kern en het beeld van f. Vind een basis van deze twee deelruimten en bepaal hun dimensie.

   (b) Is f een isomorfisme? Verklaar.

2. Voor $m \in \mathbb{R}$, beschouw volgende matrix:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

   (a) Voor welke waarde(n) van m is S niet inverteerbaar?

   (b) Voor welke waarde(n) van m heeft S uitsluitend reële eigenwaarden?

   (c) Voor welke waarde(n) van m bevat S een eigenwaarde met multipliciteit 2?

   (d) Stel nu $m = 8$. Diagonaliseer S.

3. Zijn X, Y twee niet-nulle kolomvectoren in $\mathbb{C}^n$. Beschouw de identiteitsmatrix $I_q \in M_q(\mathbb{R})$.

   (a) Voor welke waarde(n) van q is $I_q + XY^\dagger$ een matrix?

   Neem een willekeurige q zoals bepaald in 3.(a) en beschouw de matrix $A := I_q + XY^\dagger$.

   (b) Bewijs dat als A niet-singulier is, er een $\alpha \in \mathbb{C}$ bestaat, zodat de inverse van A van de vorm $A^{-1} = I_q + \alpha XY^\dagger$ is. Geef een formule voor α.

   (c) Toon aan dat A singulier is als en slechts als $Y^\dagger X = -1$. Leid hieruit af dat als $X = Y$ de matrix A niet-singulier is.

   (d) Stel A singulier. Geef een concrete niet-nulle vector uit $\mathrm{Ker}(m_A)$. Toon ook aan dat de matrix $XY^\dagger$ eigenwaarde -1 heeft.
   Ter herinnering: m_A is de lineaire afbeelding: $m_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; \quad V \mapsto AV.$

   (e) Bepaal het spoor en de rang van de matrix $XY^\dagger$. Toon aan dat 0 een eigenwaarde is van de matrix $XY^\dagger$, en bepaal de corresponderende eigenvectoren. Bepaal nu alle eigenwaarden van de matrix $XY^\dagger$. Concludeer hieruit opnieuw dat A singulier is als en slechts als $Y^\dagger X = -1$.

4. Beschouw de kwadriek Q in $\mathbb{R}^3$ die ten opzichte van de standaardbasis volgende vergelijking heeft:

$$4x^2 + z^2 - 4xz - 30x - 10y + 60 = 0.$$

   (a) Herleid deze kwadriek tot zijn Euclidische standaardvergelijking. Bepaal de aard van de kwadriek.

   (b) Beschrijf de coördinatentransformaties uit 4.(a) die nodig zijn om tot deze standaardvergelijking te komen.