Vrije Universiteit Brussel

Examen Lineaire Algebra

Faculteit Ingenieurswetenschappen
1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen en verkorte programma's

1ste zittijd
22 januari 2013

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Schrijf op elk blad je naam en vermeld je groep. Gelieve duidelijk te maken welke vraag je beantwoordt. Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Beschouw de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] : P(X) \mapsto 3P(X) - XP'(X) + P''(X)$.

   (a) Bepaal $\mathrm{Ker}(f)$; geef een basis voor deze ruimte, alsook haar dimensie.

   (b) Bepaal $\mathrm{Im}(f)$; geef een basis voor deze ruimte, alsook haar dimensie.

   (c) Gegeven de deelruimte $A = \{P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(0) = 0\}$ van $\mathbb{R}_3[X]$. Beschouw de afbeelding $f|_A$, dit is de beperking van f tot de ruimte A. Toon aan dat $f|_A$ bijectief is en bepaal zijn inverse.

2. Zij

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

   waarbij $p \in \mathbb{R}$. De eigenruimte behorende bij een eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ van A_p noteren we E_λ.

   (a) Bewijs dat, indien $p \neq 0$, A_p steeds 2 verschillende negatieve reële eigenwaarden heeft.

   (b) Bewijs dat, indien $p \neq 0$, $\dim(E_1) = \dim(E_{-1}) = 1$. Geef een basis van E_1 in dit geval.

   (c) Zij nu $p = 0$. Bepaal $\dim(E_1)$ en $\dim(E_{-1})$. Geef een basis van E_{-1} in dit geval.

   (d) Bepaal alle $p \in \mathbb{R}$ waarvoor A_p de matrix is van een orthogonale transformatie in $\mathbb{R}^4$ (voor het standaard inwendig product).

3. Gegeven de $\mathbb{C}$-vectorruimte $\mathbb{C}_2[X] = \{z_0 + z_1X + z_2X^2 | z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. Beschouw nu de volgende afbeelding

$$\langle , \rangle_\alpha : \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C} \; ; \quad (\sum_{i=0}^{2} z_i X^i, \sum_{i=0}^{2} z_i' X^i) \mapsto z_0\overline{z_0'} + z_1\overline{z_1'} + \alpha z_2\overline{z_2'},$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Voor welke waarde(n) van α is $\langle , \rangle_\alpha$ sesquilineair?

(b) Voor welke waarde(n) van α is $\langle , \rangle_\alpha$ toegevoegd symmetrisch?

(c) Voor welke waarde(n) van α is $\langle , \rangle_\alpha$ positief definiet?

Beschouw nu, voor het vervolg van deze vraag, de prehilbertruimte $(\mathbb{C}_2[X], \langle , \rangle_1)$ (zelfde notatie als hierboven). Zij $f : \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C}_2[X]$ de $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding bepaald door:

$$f(1) = X \quad ; \quad f(X) = 1 \quad ; \quad f(X^2) = i\gamma X^2,$$

waarbij $\gamma \in \mathbb{C}$.

(d) Voor welke waarde(n) van γ is f een unitaire afbeelding?

4. (a) Bepaal in de euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$ (met standaard inwendig product) het voorschrift van de isometrie f (i.e. bepaal $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ en $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ zodat $f(X) = AX + B$), die de samenstelling is van de orthogonale spiegeling ten opzichte van het vlak V met vergelijking $2x - y + z = 6$, gevolgd door een rotatie over een hoek $\frac{3\pi}{2}$ om de rechte l door de oorsprong, loodrecht op dit vlak.

(b) Als we eerst roteren over een hoek $\frac{3\pi}{2}$ om de rechte l en vervolgens orthogonaal spiegelen ten opzichte van het vlak V, wat is dan het voorschrift van de aldus bekomen isometrie? Verklaar je antwoord!

Elke vraag staat op 5 punten. Veel succes!