Vrije Universiteit Brussel

Examen Lineaire Algebra

Faculteit Ingenieurswetenschappen
1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen

1ste zittijd
21 januari 2014

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam en groep te schrijven en goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Elke vraag staat op 5 punten.
Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Beschouw de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ waarvoor

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & a+b+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & a+b+c \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal $\mathrm{Ker}(f)$; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal haar dimensie.
   Vul deze basis aan tot een basis E van $\mathbb{R}^3$.

   (b) Bepaal $\mathrm{Im}(f)$; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal haar dimensie.
   Vul deze basis aan tot een basis F van $\mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

   (c) Geef de matrix van f ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
   Gebruik overgangsmatrices om de matrix van f te bepalen ten opzichte van de basissen

$$E' = \{(1,1,0), (2,0,1), (-1,-1,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^3$$

   en

$$F' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ van } \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

2. Voor $m \in \mathbb{Z}$, beschouw de matrix

$$C_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

   (a) Voor welke waarden van m is C_m niet inverteerbaar?
   Bepaal de rang van elke matrix C_m in functie van m.

   (b) Bereken C_m^2. Bewijs dat er $a_m, b_m \in \mathbb{Z}$, afhankelijk van m, bestaan waarvoor $C_m^2 + a_m C_m + b_m I_4 = 0_4$.

   (c) Als C_m inverteerbaar is, bepaal C_m^{-1}.

3. Beschouw de euclidische ruimte $E = \mathbb{R}^n$ met standaard inwendig inproduct $\langle , \rangle$. Stel $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ een matrix met rang 1.

   Beschouw de volgende afbeelding $m_A : E \to E : X \mapsto AX$. Veronderstel dat $V = (v_1, \ldots, v_n)^t$ een basis is voor $\mathrm{Im}(m_A)$.

   (a) Bewijs dat $a_{ij} = v_i w_j$ voor een bepaalde vector $W = (w_1, \ldots, w_n)^t$. Toon aan dat $A = VW^t$.

   (b) Stel dat de matrix A een eigenwaarde $\lambda_1 \neq 0$ heeft. Bewijs dat elke vector $Z \neq \vec{0}$ waarvoor $\langle Z, W \rangle = 0$ een eigenvector van A is met eigenwaarde 0.

   Voor $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ noteren we met $\mathrm{Sp}(A)$ het spoor van A, m.a.w. de som van de diagonaalelementen van A.

   (c) Veronderstel dat $\mathrm{Sp}(A) \neq 0$. Toon aan dat $\lambda = \mathrm{Sp}(A)$ een eigenwaarde van A is en bepaal een eigenvector voor λ.

4. Beschouw de kwadriek Q in $\mathbb{R}^3$ die ten opzichte van de standaardbasis volgende vergelijking heeft:
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz + 4x - y + z = 5.$$

   (a) Herleid deze kwadriek tot zijn Euclidische standaardvergelijking. Bepaal de aard van de kwadriek.

   (b) Geef de coördinatentransformaties uit 4.(a) die nodig zijn om tot deze standaardvergelijking te komen.