Oefeningenexamen

Lineaire Algebra

Eerste Bachelor Ingenieurswetenschappen en verkorte programma's

N.B.: Gelieve op elk blad goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Begin elke vraag op een nieuw blad. Dit deel van het examen duurt 240 minuten. Verklaar elke stap!

---

1. Beschouw de afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X]$ gegeven door het voorschrift

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b + (a-c)X$$

   (a) Toon aan dat f lineair is.

   (b) Bepaal kern en beeld van f. Vind een basis van deze twee deelruimten, en bepaal hun dimensie.

   (c) Bepaal de matrix van f t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ en de basis $\{2, X-1\}$ van $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Beschouw volgend element van $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, waarbij $p, q, r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} p & q+ri \\ q-ri & s \end{pmatrix}$$

   Toon aan dat deze matrix diagonaliseerbaar is en dat de eigenwaarden noodzakelijk reëel zijn. Doe dit door de karakteristieke veelterm uit te rekenen.

3. Bepaal in $\mathbb{R}^3$ (met standaard inwendig product) de matrixvorm (d.w.z. vind een kolomvector B en een orthogonale matrix A zodat $f(X) = AX + B$) van de rotatie over een hoek θ rond de rechte met vergelijking $2x = y = z + 3$.

4. Zij E een n-dimensionale Euclidische ruimte en $q_1, q_2 : E \to \mathbb{R}$ twee kwadratische vormen. Noem de matrices geassocieerd aan q_1 en q_2 resp. B_1 en B_2.
   We zeggen dat q_1 en q_2 *equivalente* kwadratische vormen zijn indien er een niet-singuliere reële matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ bestaat zodat $B_2 = A^t B_1 A$.

   Voor de rest van de oefening, zij $n = 2$ en beschouw de kwadratische vormen

$$q_1(x, y) = x^2 + y^2 \qquad q_2(x, y) = x^2 - y^2.$$

   (a) Stel de geassocieerde matrices B_1 en B_2 op.

   (b) Zijn q_1 en q_2 equivalente kwadratische vormen?

   (c) Bestaat er een matrix $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ zodat $B_2 = A^t B_1 A$?

Puntenverdeling: 7-3-5-5. Veel succes!