Vrije Universiteit Brussel

Examen Lineaire Algebra

Faculteit Ingenieurswetenschappen **2de zittijd**

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen **6 september 2012**

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam en groep te schrijven en goed aan te duiden welke vraag je beantwoord. Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Beschouw de vectorruimte $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Voor $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ noteren we met $\mathrm{Sp}(A)$ de som van de diagonaalelementen van A.
   (a) Ga na dat de afbeelding
   $$\theta : M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \colon (A,\, B) \mapsto \mathrm{Sp}(B^t.A)$$
   een inwendig product definieert op $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

   (b) Beschouw nu de deelruimte
   $$U = \{M \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid M = M^t\}.$$
   Wat is de dimensie van deze deelruimte?

   (c) Stel nu $n = 2$. Bereken de *beste benadering* van de matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ (met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) in de deelruimte U (dit is het element van U zodat de afstand tot de gegeven matrix minimaal is).

2. Stel $\mathbb{E}^3$ een driedimensionale Euclidische ruimte. Beschrijf de isometrie $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, waar:
   $$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
   Met andere woorden, bepaal fixpunten, spiegelingvlak, rotatierechte, rotatiehoek, verschuiving, ... van f.

3. Zijn de volgende beweringen juist of fout? Verklaar grondig je antwoord. Indien de bewering juist is, bewijs; zoniet, geef tegenvoorbeeld.
   - Zijn $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dan geldt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   - Beschouw $\mathbb{C}$ als 2-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte en beschouw de afbeelding f, gedefinieerd als volgt:
     $$\begin{gathered}\mathbb{C} \to \mathbb{C}; \\ a + bi \mapsto a - bi,\end{gathered}$$
     waarbij $a, b \in \mathbb{R}$.
     (a) f is een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding.
     (b) $\det(f) \neq 0$.
     (c) f is diagonaliseerbaar.

4. Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte. Noteer $B(V)$ de verzameling van *bilineaire vormen* op V; i.e. $B(V) = \{b : V \times V \to \mathbb{R} \mid \text{b is bilineair}\}$.
   Toon aan dat $B(V)$ een $\mathbb{R}$-vectorruimte is, waarbij de optelling en de scalaire vermenigvuldiging als volgt gedefinieerd zijn:

   - $(f+g)(v,v') := f(v,v') + g(v,v'), \;\; \forall f,g \in B(V), v,v' \in V$,
   - $(\alpha.f)(v,v') := \alpha f(v,v'), \;\; \forall f \in B(V), \alpha \in \mathbb{R}, v,v' \in V$.

   Beschouw vervolgens de volgende afbeelding:

$$\phi : B(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})); \;\; b \mapsto \phi(b),$$

   waarbij, voor $v, v' \in V$,

$$\phi(b) : V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R}); \;\; v \mapsto (\phi(b))(v)$$

   en $((\phi(b))(v))(v') = b(v,v')$.

   - Toon aan dat ϕ een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding is.
   - Bewijs dat ϕ injectief is.
   - Is ϕ een isomorfisme? Verklaar!