Vrije Universiteit Brussel

Examen Lineaire Algebra

Faculteit Ingenieurswetenschappen **2de zittijd**
1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen **4 september 2014**

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam te schrijven. Duid op het opgaveblad aan welke vragen je beantwoordt. Elke vraag staat op 5 punten.
Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Gegeven een matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Beschouw de afbeelding

$$f_A : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R}) : X \mapsto AX - XA.$$

   (i) Bewijs dat f_A lineair is.

   (ii) Bewijs dat f_A niet injectief, noch surjectief is.

   (iii) Is $\Omega = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) | XA = AX\}$ een deelvectorruimte van $M_{n,n}(\mathbb{R})$? Bewijs dat $\Omega \neq \{\vec{0}\}$.

   (iv) Zij $n = 2$ en $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, bepaal de rang van f_A in functie van $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

   met parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (i) Voor welke waarden van a, b, c is de matrix B diagonaliseerbaar?

   (ii) Bepaal voor deze waarden de matrix M zodanig dat $M^{-1}BM$ een diagonaalmatrix is.

3. Het spoor $\mathrm{Sp}(C)$ van een matrix $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ is gelijk aan de som van zijn diagonaalelementen. Het inproduct van twee matrices $X, Y \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ is gedefinieerd als $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Sp}(Y^t X)$. Beschouw de deelruimte $U = \{M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) | M^t = M\}$ van $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

   Bepaal de orthogonale projectie van een matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ op U.

4. Stel in $\mathbb{R}^3$ (met standaard inwendig product) de matrixvorm op (d.w.z. vind een kolommatrix B en een orthogonale matrix A, zodat $f(X) = AX + B$) van de rotatie over de hoek $\theta = -\pi$ rond de as l met parametervergelijkingen,

$$\begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -t \\ z &= 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \ .$$