Vrije Universiteit Brussel

# Examen Lineaire Algebra

**Faculteit Ingenieurswetenschappen** **2de zittijd**
**1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen** **5 september 2013**

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam en groep te schrijven en goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Elke vraag staat op 5 punten. Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Beschouw de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ waarvoor geldt dat $f(X) = X + 2$, $f(2X^2 + X) = 4X^3 + 2X^2$, $f(X^2 + X + 1) = X^3 + 1$.

   (a) Bepaal de kern en het beeld van $f$. Vind een basis voor elk van deze twee deelruimten en bepaal eveneens voor beide deelruimten de dimensie.

   (b) Gegeven zijn de basis $E = \{X^2, X, 1\}$ van $\mathbb{R}_2[X]$ en de basis $F = \{X^3, X^2, X, 1\}$ van $\mathbb{R}_3[X]$.
   Bepaal de matrix $[f]_{F,E}$ van de afbeelding $f$ ten opzichte van de basissen $E$ en $F$.

2. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix},$$

   waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) <u>Onderstel $a \neq 0$.</u> Zijn er voorwaarden waaraan $b$ en $c$ moeten voldoen opdat $A$ diagonaliseerbaar zou zijn? Verklaar!

   (b) <u>Onderstel nu $a = 0$.</u> Bewijs dat $A$ niet diagonaliseerbaar is.

3. Beschouw de volgende afbeelding:

$$b : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R} \; ; \quad \left(\sum_{i=0}^{1} a_i X^i, \sum_{i=0}^{1} a'_i X^i\right) \mapsto \alpha a_0 a'_0 + \beta a_0 a'_1 + \gamma a'_0 a_1 + \delta a_1 a'_1,$$

   waarbij $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

   (a) Bewijs dat $b$ bilineair is voor alle waarden van $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

   (b) Bewijs dat $b$ symmetrisch is *als en slechts als* $\beta = \gamma$.

   (c) Stel nu $\beta = \gamma = 2$. Zoek zelf een waarde voor $\alpha$ en een waarde voor $\delta$ zodat $b$ een inwendig product wordt. Leg uit.

4. Stel $\mathbb{E}^3$ de gebruikelijke driedimensionale Euclidische ruimte. Beschrijf de isometrie $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, gegeven door:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{5} & 2 \\ 2\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -\sqrt{5} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$