



N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam te schrijven en goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Elke vraag staat op 5 punten.
Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

1. Beschouw de afbeelding $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$ gedefinieerd door

$$f(P(X)) = X^2P'(X) + XP''(X) + P'''(X) + (X^4 + X^2 + 2)P'(0)$$

voor $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$.

- Toon aan dat f een lineaire afbeelding is.
- Bepaal de kern van f ; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal de dimensie.
Vul deze basis aan tot een basis E van $\mathbb{R}_3[X]$.
- Bepaal het beeld van f ; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal de dimensie.
Vul deze basis aan tot een basis F van $\mathbb{R}_4[X]$.
- Bepaal de matrix $[f]_{F,E}$ van f ten opzichte van de zonet bepaalde basissen E en F .

2. Zij $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ bepaald door $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ -1 & i = j \end{cases}$.

Bewijs dat $\det(A) = (-1)^{n-3}(n-2)2^{n-1}$.

3. Beschouw een reële vectorruimte V en een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$, $f \neq 0$. Veronderstel dat er een natuurlijk getal k bestaat zodat $f^k \neq 0$ en $\forall i > k : f^i = 0$. Beschouw een vector $\vec{x} \in V$ waarvoor $f^k(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

- Toon aan dat $E = \{\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^k(\vec{x})\}$ een stel lineair onafhankelijke vectoren van V is.
- Beschouw de deelruimte W van V voortgebracht door $E = \{\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^k(\vec{x})\}$.
Toon aan dat $f(W) \subset W$.
- Beschouw de afbeelding $f|_W : W \rightarrow W$. Bepaal de matrix $[f|_W]_{E,E}$ van de lineaire afbeelding $f|_W$ ten opzichte van basis E van W .
- Toon aan dat er geen basis E' voor W bestaat waarvoor $[f|_W]_{E',E'}$ een diagonaalmatrix is.

4. Bepaal van de volgende kwadriek de Euclidische standaardvergelijking en bepaal de aard van de kwadriek. Geef de coördinatentransformaties die nodig zijn om tot deze standaardvergelijking te komen. Orden de eigenwaarden van klein naar groot, met eventuele nullen achteraan.

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz + y + z + 1 = 0$$