Vrije Universiteit Brussel

Examen Lineaire Algebra

Faculteit Ingenieurswetenschappen **2de zittijd**
1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen **3 september 2015**

N.B.: Begin elke vraag op een nieuw blad. Gelieve op elk blad je naam te schrijven en goed aan te duiden welke vraag je beantwoordt. Elke vraag staat op 5 punten.
Lees de vragen aandachtig, verklaar elke stap en schrijf duidelijk!

---

1. Beschouw de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ gedefinieerd als

$$f(aX^2+bX+c) = \begin{pmatrix} -2a+b & c \\ -c & 2a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & b \\ -b & 2a \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal $\mathrm{Ker}(f)$; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal haar dimensie. Vul deze basis aan tot een basis E van $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Bepaal $\mathrm{Im}(f)$; geef een basis voor deze deelruimte en bepaal haar dimensie. Vul deze basis aan tot een basis F van $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

   (c) Bepaal de matrix van f ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}_2[X]$ en $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Gebruik overgangsmatrices om de matrix van f te bepalen ten opzichte van de basissen

$$E' = \{X^2+X, X^2+2, -X^2+X+1\} \text{ van } \mathbb{R}_2[X]$$

   en

$$F' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ van } \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

2. Gegeven $n \in \mathbb{N}_0$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ met $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Beschouw

$$b : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} : (P(X), Q(X)) \mapsto P(x_0)Q(x_0) + P(x_1)Q(x_1) + \cdots + P(x_n)Q(x_n).$$

   Toon aan dat b een inproduct bepaalt op $\mathbb{R}_n[X]$. (Hint: een niet-nulle veelterm van graad n heeft ten hoogste n nulpunten)

3. Beschouw de matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

met parameter $a \in \mathbb{R}$.

(a) Voor welke waarde(n) van a is de matrix A_a regulier?

(b) Voor welke waarde(n) van a zijn alle eigenwaarden van A_a reëel?

(c) Voor welke waarde(n) van a heeft de matrix A_a een eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit minstens 2? Controleer voor elk van deze waarden of de matrix A_a diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$ of niet. Indien ja, bepaal matrices M en B zodat $M^{-1}A_aM = B$ een diagonaalmatrix is.

4. Gegeven is de isometrie g van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$ bepaald door de formule

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+4 \\ z+6 \\ x+2 \end{pmatrix}.$$

Toon aan dat g de samenstelling is van een rotatie met een verschuiving in de richting van de as van de rotatie. Bepaal deze rotatie en verschuiving.