Vrije Universiteit Brussel — Academiejaar 2012-2013

Oefeningenexamen 10 juni 2013

Wiskunde: gevorderde analyse en meetkunde

Eerste Bachelor Bio-ingenieurswetenschappen en Ingenieurswetenschappen: architectuur

Geef je antwoorden ten laatste om 12u30 af. Los elke vraag op een apart blad op, schrijf op elk blad je naam en je rolnummer en het nummer van de vraag. Schrijf op het opgavenblad uit hoeveel beschreven bladen je antwoorden bestaan, reken kladbladen en opgavenblad niet mee. Geef duidelijk aan welke pagina's kladbladen zijn. Zorg ervoor dat je oplossing duidelijk leesbaar is, verklaar elke stap in je oplossing. Geef alle kladbladen en het opgavenblad ook af.

---

1. (2p) De rij van Fibonacci $(f_n)_n$ wordt als volgt gedefinieerd: $f_0 = f_1 = 1$ en $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ voor $n \geq 2$. Bepaal de reekssom
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}}.$$
Hint: toon aan en gebruik dat
$$\frac{1}{f_n f_{n+2}} = \frac{1}{f_n f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}}.$$

2. Zijn de volgende reeksen absoluut convergent? Zo niet, zijn ze conditioneel convergent of divergent?
(a) (2p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2n+1}$ (b) (2p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(1/n)}{n^2+1}$

3. (3p) Bepaal de lokale extrema en zadelpunten van de functie op $\mathbb{R}^2$ met voorschrift $f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$.

4. (2p) Tom speelt met knikkers op het oppervlak met vergelijking $z = (x^2 + y^2)e^{-y}$. Als hij een knikker loslaat op het punt op het oppervlak met $x = 1/2$ en $y = 1$, in welke richting (u_1, u_2) zal deze knikker dan beginnen te rollen?

5. (4p) Bepaal het volume onder de grafiek van de functie met voorschrift $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}}$ boven het gebied D bestaande uit alle punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $7 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

6. (2p) Bereken de lijnintegraal van de functie met voorschrift $f(x, y, z) = xy + y + z$ over de kromme met parametrisatie
$$\vec{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2t, t, 2 - 2t).$$

7. (3p) Bereken de uitwaartse flux van het vectorveld $\vec{F} = xy\vec{e}_1 + yz\vec{e}_2 + xz\vec{e}_3$ door de rand van de kubus in het eerste octant begrensd door de coördinaatvlakken en de vlakken $x = 1$, $y = 1$, en $z = 1$. Je mag kiezen of je de flux rechtstreeks als een oppervlakteintegraal berekent of de stelling van Gauss gebruikt.