Vrije Universiteit Brussel

2de Bach. IR Wet.: Architectuur
Academiejaar 2013-2014
1ste zittijd, januari 2014

Wiskunde: Voortgezette Analyse

1. Gegeven is de reeks
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}x^2}{(x^2+3)^{2n+1}}$$
Toon aan dat de reeks puntsgewijs convergeert over $\mathbb{R}$. Toon aan dat ze uniform convergeert over elk interval $]a, b[$ met $0 < a < b$.

2. Bereken de Fouriergetransformeerde van de volgende functie.
$$f(t) = \begin{cases} \sin(t)\cos(t) & \text{als } -\pi \le t \le \pi. \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$x^6 y''^2 - xy'' - 2y' = 0$$

4. Bepaal de algemene integraal van het volgende differentiaalstelsel,
$$\begin{cases} y' - 2y + 3z & = & \cos 2x \\ 3z' + 3z + 4y & = & -2\sin(2x) \end{cases}$$

5. Bepaal het integraaloppervlak van de gegeven partiële differentiaalvergelijking dat door de gegeven kromme k gaat.
$$xp - (xy + y + x^2)q = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{z\sqrt{z^2+4}}, \text{ met } k \begin{cases} yx - 2x = 2 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Het examen duurt 4 uur. Enkel het gebruik van het theoriegedeelte van de cursus is toegestaan. Puntenverdeling voor het oefeningenexamen (goed voor 45% van het totale eindresultaat); vraag 1: 10 ptn, vraag 2: 5 ptn, vraag 3: 10 ptn , vraag 4: 10 ptn, vraag 5: 10 ptn.
Veel succes!

2de Bach. IR Wet.: Architectuur
Academiejaar 2013-2014
1ste zittijd, januari 2014

Wiskunde: Voortgezette Analyse

1. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

   (a) $x^6 y''^2 - xy'' - 2y' = 0$

   (b) $y''' + y = xe^{-x}$

2. Bepaal de algemene integraal van het volgende differentiaalstelsel,
$$\begin{cases} y' - 2y + 3z & = & \cos 2x \\ 3z' + 3z + 4y & = & -2\sin(2x) \end{cases}$$

3. Bepaal het integraaloppervlak van de gegeven partiële differentiaalvergelijking dat door de gegeven kromme k gaat.
$$xp - (xy + y + x^2)q = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{z\sqrt{z^2+4}}, \text{ met } k \begin{cases} yx - 2x = 2 \\ z = 0 \end{cases} .$$

4. Bepaal van het volgende differentiaalstelsel twee verschillende eerste integralen.
$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2 y} = \frac{\mathrm{d}y}{y + y^2 x} = \frac{\mathrm{d}z}{y + yz}$$

Het examen duurt 4 uur. Enkel het gebruik van het theoriegedeelte van de cursus is toegestaan. Puntenverdeling voor het oefeningenexamen (goed voor 45% van het totale eindresultaat); vraag 1: 20 ptn, vraag 2: 10 ptn, vraag 3: 10 ptn , vraag 4: 5 ptn.
Veel succes!

Oplossingen

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}x^2}{(x^2+3)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{n^3}x^2}{(x^2+3)^{2n+1}}$$

Deze reeks convergeert puntsgewijs over $\mathbb{R}$*.*
Herinner het volgende,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = s(x), \text{ voor een } s : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

als

$$(s_n)_n \xrightarrow{p} s, \text{ waarbij } s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

id est

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : (s_n(x_0))_n \to s(x_0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) = l(x_0)$$

Beschouw dus de volgende numerieke positieve reeks,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}x_0^2}{(x_0^2+3)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n, \quad (v_n = u_n(x_0))$$

Deze reeks is convergent wegens de regel van d'Alembert,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3}x_0^2}{(x_0^2+3)^{2n+3}} \frac{(x_0^2+3)^{2n+1}}{\sqrt{n^3}x_0^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{(x_0^2+3)^2\sqrt{n^3}} = \frac{1}{(x_0^2+3)^2} < 1 (\forall x_0 \in \mathbb{R}).$$

Dus convergent.
Besluit: De reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}x^2}{(x^2+3)^{2n+1}}$ is puntsgewijs convergent over $\mathbb{R}$.

Deze reeks convergeert uniform over elk interval $]a, b[$*, met* $0 < a < b$*.*
We gebruiken hiervoor het criterium van Weierstrass. Dit zegt: $\displaystyle\sum_n u_n(x)$ uniform convergent als $\exists N : \forall n > N, \exists m_n : \forall x : |u_n(x)| \leq m_n$ en $\displaystyle\sum_n m_n$ is een convergente numerieke reeks.
Beschouw

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sqrt{n^3}x^2}{(x^2+3)^{2n+1}} \right| \leq \frac{\sqrt{n^3}b^2}{(a^2+3)^{2n+1}} \leq \frac{\sqrt{n^3}b^2}{e^{2n+1}} =: m_n, \forall n \in \mathbb{R}$$

met $0 < a < x < b$.
Er geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}b^2}{e^{2n+1}} = b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{e^{2n+1}}.$$

Deze laatste reeks vergelijken we nu met de convergente reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

We krijgen dan

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3}}{e^{2n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^{2n+1}} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{2e^{2n+1}} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2e^{2n+1}} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4e^{2n+1}} = 0.$$

De reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}b^2}{e^{2n+1}}$$

is dus convergent en het resultaat volgt dus uit het criterium van Weierstrass.

2. De Fouriergetransformeerde van f is,

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{F}\{f\}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin(2t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

We hebben dat

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2}\sin(2t)e^{-ipt}\mathrm{d}t &= \frac{-1}{4}\cos(2t)e^{-ipt} - \frac{ip}{4}\int \cos(2t)e^{-ipt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{4}\cos(2t)e^{-ipt} - \frac{ip}{8}\sin(2t)e^{-ipt} + \frac{p^2}{8}\int \sin(2t)e^{-ipt}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\int \frac{1}{2}\sin(2t)e^{-ipt}\mathrm{d}t = \frac{4}{4-p^2}\left(\frac{-1}{4}\cos(2t)e^{-ipt} - \frac{ip}{8}\sin(2t)e^{-ipt}\right).$$

We hebben dus dat

$$\begin{aligned} F(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)e^{-ipt}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{4-p^2}\left(-\cos(2t)e^{-ipt} - \frac{ip}{2}\sin(2t)e^{-ipt}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{-1}{4-p^2}\cos(2\pi)e^{-ip\pi} + \frac{1}{4-p^2}\cos(2\pi)e^{ip\pi} \\ &= \frac{1}{4-p^2}\left(e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}\right) \\ &= \frac{2i\sin p\pi}{4-p^2}. \end{aligned}$$

3. Eerst zien we dat y ontbreekt, daarom doen we de substitutie $z = y'$ en zo krijgen we dat

$$x^6 z'^2 - xz' - 2z = 0$$

We hebben dat

$$2z = x^6 z'^2 - xz'.$$

Stel $z' = p$, dan krijgen we

$$\begin{array}{rcl} 2z &=& x^6p^2 - xp \\ & \Downarrow & \\ 2z' &=& 6x^5p^2 + 2x^6pp' - p - xp' \\ & \Downarrow & \\ 2p &=& 6x^5p^2 + 2x^6pp' - p - xp'. \end{array}$$

We hebben dus een tweedegraadsvergelijking in p, $6x^5p^2 + 2x^6pp' - 3p - xp' = 0$ die we zullen ontbinden in factoren. Hierbij is de discriminant van de vergelijking gelijk aan

$$(2x^6p' - 3)^2 + 24x^6p' = (2x^6p' + 3)^2$$

We vinden dus voor de nulpunten van onze tweedegraadsvergelijking

$$p = \frac{-2x^6p' + 3 + 2x^6p' + 3}{12x^5} = \frac{1}{2x^5}$$

en

$$p = \frac{-2x^6p' + 3 - 2x^6p' - 3}{12x^5} = \frac{-xp'}{3}.$$

We vinden dus twee vergelijkingen die we moeten oplossen. Enerzijds hebben we dat

$$2x^5p = 1.$$

Dit geeft ons dat

$$p = \frac{1}{2x^5} \Rightarrow z = \frac{-1}{8x^4} \Rightarrow y = \frac{1}{24x^3},$$

wat een singuliere oplossing is. (Invullen in de oorspronkelijke differentiaalvergelijking toont ons dat dit effectief een oplossing is.)
Anderzijds hebben we de differentiaalvergelijking

$$xp' + 3p = 0.$$

Dit is een scheidbare differentiaalvergelijking, dus we hebben

$$\frac{1}{p}\mathrm{d}p = \frac{-3}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|p| = -3\ln|x| + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1x^{-3}.$$

Of hieruit volgt, aangezien $2z = x^6p^2 - xp$, dat

$$z = \frac{c_1^2x^2 - c_1}{2x^2}.$$

Hieruit volgt

$$y = \frac{c_1^2x}{2} + \frac{c_1}{2x} + c_2.$$

De algemene integraal van onze differentiaalvergelijking is dus gelijk aan

$$2xy = c_1^2x^2 + c_1 + 2c_2x.$$

4. Eerst leiden we de eerste vergelijking af, zo krijgen we

$$y'' = 2y' - 3z' - 2\sin(2x) = 2y' + 3z + 4y.$$

Vervolgens gaan we z elimineren uit het volgende stelsel

$$\begin{cases} y'' &= 2y' + 3z + 4y \\ 3z &= -y' + 2y + \cos(2x) \end{cases}.$$

Zo krijgen we

$$y'' = 2y' - y' + 2y + \cos(2x) + 4y = y' + 6y + \cos(2x) \Rightarrow y'' - y' - 6y = \cos(2x).$$

We bepalen de algemene oplossing van de geassocieerde homogene differentiaalvergelijking. Daarvoor bekijken we de karakteristieke vergelijking.

$$y'' - y' - 6y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

De homogene oplossing is dus

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}.$$

Vervolgens bepalen we de particuliere oplossing met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

$$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x) \Rightarrow y_p' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) \Rightarrow y_p'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Drukken we uit dat

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = \cos(2x),$$

dan vinden we

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 2A\sin(2x) - 2B\cos(2x) - 6A\cos(2x) - 6B\sin(2x) \\ &= (-10A - 2B)\cos(2x) + (-10B + 2A)\sin(2x). \end{aligned}$$

We vinden dus dat

$$A = \frac{-5}{52}, B = \frac{-1}{52}.$$

Onze particuliere oplossing is dus

$$y_p = \frac{-5}{52}\cos(2x) - \frac{1}{52}\sin(2x)$$

en onze algemene oplossing is

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + \frac{-5}{52}\cos(2x) - \frac{1}{52}\sin(2x).$$

We bepalen tot slot nog z.

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\cos(2x) \\ &= -\frac{1}{3}(-2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x} + \frac{10}{52}\sin(2x) - \frac{2}{52}\cos(2x)) + \frac{2}{3}(c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + \frac{-5}{52}\cos(2x)) \\ &\quad + \frac{2}{3}(-\frac{1}{52}\sin(2x)) + \frac{1}{3}\cos(2x) \\ &= \frac{4}{3}c_1e^{-2x} - \frac{1}{3}c_2e^{3x} + \frac{11}{39}\cos(2x) - \frac{1}{13}\sin(2x). \end{aligned}$$

We bekomen dus als oplossing het volgende stelsel

$$\begin{cases} y &= c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + \frac{-5}{52}\cos(2x) - \frac{1}{52}\sin(2x) \\ z &= \frac{4}{3}c_1e^{-2x} - \frac{1}{3}c_2e^{3x} + \frac{11}{39}\cos(2x) - \frac{1}{13}\sin(2x) \end{cases}.$$

5. We zoeken twee eerste integralen van het geassocieerde differentiaalstelsel

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}y}{xy + y + x^2} = \frac{z\sqrt{z^2+4}\mathrm{d}z}{x^2\sqrt{x^2+4}}.$$

Een eerste eerste integraal bekomen we door te kijken naar de vergelijking

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}y}{xy + y + x^2}.$$

Hieruit halen we de differentiaalvergelijking

$$xy' + (x+1)y = -x^2.$$

We bepalen eerst de oplossing van de geassocieerde homogene differentiaalvergelijking,

$$xy' + (x+1)y = 0.$$

We bekomen

$$y_h = c_1 \exp\left(-\int \frac{x+1}{x}\mathrm{d}x\right) = c_1 \frac{1}{x}e^{-x}.$$

De particuliere oplossing bepalen we met de methode van de variatie van de constante.

$$y_p = c(x)\frac{1}{x}e^{-x} \Rightarrow y_p' = c'(x)\frac{1}{x}e^{-x} - c(x)\frac{1}{x^2}e^{-x} - c(x)\frac{1}{x}e^{-x}.$$

We drukken uit dat

$$xy_p' + (x+1)y_p = -x^2.$$

Zo krijgen we dat

$$c'(x)e^{-x} - c(x)\frac{1}{x}e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} + c(x)\frac{1}{x}e^{-x} = -x^2.$$

Dus

$$c'(x) = -x^2e^x \Rightarrow c(x) = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x.$$

De particuliere oplossing is dus

$$y_p(x) = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)\frac{1}{x}e^{-x} = -x + 2 - \frac{2}{x}.$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus

$$y = c_1\frac{1}{x}e^{-x} - x + 2 - \frac{2}{x} \Rightarrow c_1 = yxe^x + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x.$$

Een tweede eerste integraal bekomen we door te kijken naar de vergelijking

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{z\sqrt{z^2+4}\mathrm{d}z}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

Daaruit halen we de scheidbare differentiaalvergelijking

$$\int x\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x = \int z\sqrt{z^2+4}\mathrm{d}z$$

We hebben dus
$$\frac{1}{2}\frac{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\frac{(z^2+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$$
Of,
$$(x^2+4)^{\frac{3}{2}} - (z^2+4)^{\frac{3}{2}} = c_2.$$
Voor het integraaloppervlak krijgen we
$$\begin{cases} yxe^x + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = c_1 \\ (x^2+4)^{\frac{3}{2}} - (z^2+4)^{\frac{3}{2}} = c_2 \\ yx - 2x = 2 \\ z = 0 \end{cases}.$$
Of we krijgen
$$(x^2+4) = e^{-x}c_1$$
en
$$(x^2+4) = (c_2+8)^{\frac{2}{3}}.$$
Het integraaloppervlak wordt dus
$$\left((x^2+4)^{\frac{3}{2}} - (z^2+4)^{\frac{3}{2}} + 8\right)^{\frac{2}{3}} - yx - x^2 + 2x - 2 = 0.$$

6. We bekijken voor onze eerste eerste integraal de volgende vergelijking
$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}y}{y+y^2x}.$$
Daaruit halen we de differentiaalvergelijking
$$y + y^2x = x^2yy' \Rightarrow x^2y' - yx = 1, \text{ met } y \neq 0.$$
De homogene oplossing is dan
$$y_h = c_1\exp\left(-\int \frac{-x}{x^2}\mathrm{d}x\right) = c_1x.$$
De particuliere oplossing is dan
$$y_p(x) = c(x)x.$$
Zo bekomen we
$$x^3c'(x) + c(x)x^2 - c(x)x^2 = 1 \Rightarrow c(x) = \frac{-1}{2x^2}.$$
Dus onze particuliere oplossing is
$$y_p(x) = \frac{-1}{2x}$$
en de algemene integraal is dan
$$y = c_1x - \frac{1}{2x} \Rightarrow c_1 = \frac{y}{x} + \frac{1}{2x^2}.$$
Voor onze tweede eerste integraal bekijken we de vergelijking
$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}z}{y+yz}$$

We hebben de scheidbare differentiaalvergelijking

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{1+z}.$$

Zo krijgen we

$$\frac{-1}{x} = \ln|1+z| + c \Rightarrow c_2 = \frac{1}{x} + \ln|1+z|.$$

7. We bepalen eerst de oplossing van de geassocieerde homogene differentiaalvergelijking

$$y''' + y = 0.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

De discriminant van de tweedegraadsvergelijking hierboven is negatief, dus we hebben twee complex toegevoegde wortels,

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De homogene oplossing is dus

$$y_h = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Voor de particuliere oplossing stellen we

$$\begin{aligned}
y_p &= (Ax+B)e^{-x}x \\
y_p' &= -(Ax^2+Bx)e^{-x} + (2Ax+B)e^{-x} \\
y_p'' &= (Ax^2+Bx)e^{-x} - 2(2Ax+B)e^{-x} + 2Ae^{-x} \\
y_p''' &= -(Ax^2+Bx)e^{-x} + 3(2Ax+B)e^{-x} - 6Ae^{-x}.
\end{aligned}$$

Zo krijgen we

$$-(Ax^2+Bx)e^{-x} + (6Ax+3B)e^{-x} - 6Ae^{-x} + (Ax^2+Bx)e^{-x} = xe^{-x}$$

Hieruit volgt dat $A = \frac{1}{6}$ en $B = \frac{1}{3}$. Onze particuliere oplossing is dan gelijk aan

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x\right)e^{-x}$$

en de algemene oplossing is gelijk aan

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x\right)e^{-x}.$$