Opgave Bewijs, voor een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = k$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left\{ \begin{array}{lcc} |x-a| & < & \delta \\ |y-b| & < & \delta \\ (x,y) & \neq & (0,0) \end{array} \right. \Rightarrow |f(x,y)-k| < \varepsilon$$

Oplossing Veronderstel eerst dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = k$$

Dit betekent

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)-k| < \varepsilon \qquad (1)$$

Als $|x-a| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ en $|y-b| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, dan geldt duidelijk $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$ en dus wegens 1 gel dt ook $|f(x,y)-k| < \varepsilon$.

We hebben dus aangetoond:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 (\text{nl.} \frac{\delta}{\sqrt{2}}) > 0 : \left\{ \begin{array}{lcc} |x-a| & < & \delta_1 \\ |y-b| & < & \delta_1 \\ (x,y) & \neq & (0,0) \end{array} \right. \Rightarrow |f(x,y)-k| < \varepsilon$$

Omgekeerd, veronderstel

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left\{ \begin{array}{lcc} |x-a| & < & \delta \\ |y-b| & < & \delta \\ (x,y) & \neq & (0,0) \end{array} \right. \Rightarrow |f(x,y)-k| < \varepsilon \qquad (2)$$

Als $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, dan $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$ en dus $|x-a| < \delta$ en $|y-b| < \delta$. Dan levert 2 ons dat $|f(x,y)-k| < \varepsilon$. Dus hebben we aangetoond:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 (= \delta) > 0 : 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y)-k| < \varepsilon$$