

Opgave Bewijs de volgende eigenschap:
Zij $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ twee functies met

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$$

en g begrensd in een omgeving van (a, b) .
Dan geldt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = 0$$

Oplossing g begrensd op een omgeving, dus

$$\exists M, \exists \delta_g > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta_g \Rightarrow |g(x, y)| < M$$

Anderzijds

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$$

dus hebben we

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon$$

Stel $\varepsilon > 0$ willekeurig, hoe moeten we onze δ kiezen?

Zij $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Dan

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon'$$

Kies nu $\delta = \min(\delta_g, \delta_1)$.

$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y)g(x, y)| < \varepsilon' M = \varepsilon$$

m.a.w.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = 0$$