Opgave Onderstel dat f een bijectie is in een omgeving van x_0, en noteer g voor de inverse functie. We weten dat $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Gebruik dit om te bewijzen dat

$$\begin{aligned} g''(y_0) &= -\tfrac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3} \\ g'''(y_0) &= \tfrac{3f''(x^{2}_{)}-f'(x_0)f'''(x_0)}{f'(x_0)^5} \end{aligned}$$

Noteert men $f(x) = y$ en $g(y) = x$, dan kan men de bovenstaande eigenschappen ook als volgt schrijven

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{y'} \\ x'' &= -\tfrac{y''}{(y')^3} \\ x''' &= \tfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5} \end{aligned}$$

Oplossing We weten dus dat

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

en

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dy}$$

De opeenvolgende afgeleiden van x naar y berekent men dan als volgt

$$\begin{aligned} x'' = \tfrac{d^2x}{dy^2} &= \tfrac{d}{dy}\left[\tfrac{dx}{dy}\right] = \tfrac{d}{dy}\left[\tfrac{1}{dy/dx}\right] \\ &= \tfrac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{dy/dx}\right] \cdot \tfrac{dx}{dy} \\ &= -\tfrac{d^2y/dx^2}{(dy/dx)^2} \cdot \tfrac{1}{dy/dx} \\ &= -\tfrac{d^2y/dx^2}{(dy/dx)^3} = -\tfrac{y''}{(y')^3} \end{aligned}$$

OEFENING: Bewijs nu zelf de formule voor x'''.