We behandelen hier nog enkele begrippen informeel, veeleer de idee achter het begrip uitleggen, een theoretische, formeel correcte behandeling van het begrip staat in het theorieboek. Om een maximum aan inzicht te verwerven lijkt het me aangewezen bij de studie van die begrippen beide aanpakken te combineren. De begrippen die ik hier wil behandelen zijn de volgende : afgeleide, differentiaal en de kettingregel.

0.0.1 Wat is een afgeleide?

De afgeleide van een functie $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in een punt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ is de **lineaire afbeelding** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ waarvoor $\vec{F}(\vec{a}) + \mathcal{L}(\vec{x} - \vec{a})$ de beste **lineaire** benadering is van $\vec{F}(\vec{x})$. Deze lineaire afbeelding noteren we dan $D\vec{F}(\vec{a})$. Dus $D\vec{F}(\vec{a}) \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ en heeft dus een matrix.
Wat wordt nu bedoeld met **beste**? De fout op de benadering is de term $\vec{E}(\vec{h})||\vec{h}||$ van Definitie 5.2.7 en die voldoet aan

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \vec{E}(\vec{h}) = 0$$

We gaan hier niet verder op in.
In het geval van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} (n = m = 1)$ en een punt $a \in \mathbb{R}$ weten we dat deze (beste) lineaire benadering van $f(x)$

$$f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

(met als grafiek dus de raaklijn) is.
De lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is hier dus

$$Df(a) : x \to f'(a)x$$

$Df(a) \in Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en heeft dus een 1×1 matrix. Ten opzichte van de standaardbasissen is deze

$$(f'(a)) \quad = \quad \left(\frac{df}{dx}(a)\right)$$

Stel bv. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$ en $a = 1$. Dan is de afgeleide van x^2 in 1 dus de lineaire afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met als matrix t.o.v. de standaardbassissen

$$(2)$$

Dit is een hele mondvol en we korten dit dan ook af tot "de afgeleide van x^2 in 1 is 2"

In het geval van een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} (m = 1)$ en een punt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ weten we dat deze (beste) lineaire benadering van $f(x)$

$$f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

(met als grafiek dus het raak(hyper)vlak) is.
De lineaire afbeelding $Df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is hier dus

$$\begin{array}{rcll} Df(\vec{a}) & : & \vec{x} & \to \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot \vec{x} \\ & & & = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})) \cdot (x_1, \ldots, x_n) \\ & & & = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) x_n \end{array}$$

waarbij we opmerken dat $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ een reëel getal is (nl., de partiële afgeleide van f naar x_i in het punt $\vec{a}$).
$Df(\vec{a}) \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ en heeft dus een $1 \times n$ matrix :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

In het algemeen geval van een functie

$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \vec{x} \to (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$$

wordt de matrix van de afgeleide $D\vec{F}(\vec{a})$ gegeven door

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

0.0.2 Wat is een differentiaal?

Dit begrip hangt nauw samen met het begrip afgeleide. We behandelen eerst het geval van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een punt $a \in \mathbb{R}$.
De functiewaarde van f in $x = a$ is $y = f(a)$. Stel dat x nu toeneemt (verandert) met Δx, dus van a naar $a + \Delta x$. Wat zal dan de verandering zijn van de functiewaarde? Wel, deze zal veranderen (toenemen/afnemen) van $f(a)$ naar $f(a + \Delta x)$. We noteren de verandering in functiewaarde Δy

$$\begin{array}{rcll} \Delta x & = & a + \Delta x - a & \text{(verandering van abscis)} \\ \Delta y & = & f(a + \Delta x) - f(a) & \text{(verandering van ordinaat)} \end{array}$$

Voor andere veranderingen Δx van de abscis x zullen we andere veranderingen Δy van de ordinaat y opmeten. Δy is dus afhankelijk van Δx, t.t.z. Δy is een functie van Δx. Deze functie kan zeer vreemd zijn (eigenlijk is ze even vreemd als f zelf).
In plaats van te werken met f rond a, gaan we werken met de beste lineaire benadering (d.w.z. we gaan $f(x)$ vervangen door $f(a) + f'(a)(x - a)$). We zullen dan geen exacte waarden hebben, maar opnieuw een "beste lineaire benadering". We verliezen exactheid, maar winnen gebruiksvriendelijkheid.
Om aan te duiden dat we met de afgeleide werken noteren we dy i.p.v. Δy en dx i.p.v. Δx

$$\Delta y = f(a) - f(a + \Delta x)$$

wordt dan

$$dy = [f(a) + f'(a)(a-a)] - [f(a) + f'(a)(a+dx-a)] = f'(a)dx = \frac{dy}{dx}dx$$

met dus $\frac{dy}{dx} = f'(a)$.
Δy is dus de verandering van de waarde van $f(x)$ bij een verandering Δx van x.
dy is de verandering van de waarde van $f(a) + f'(a)(x-a)$ bij een verandering dx van x.
Wat nu als $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$? Het probleem is hetzelfde : we willen weten wat de verandering is van $y = f(\vec{x})$ als de componenten x_i van $\vec{x}$ met respectievelijk Δx_i veranderen.
Daarvoor bekijken we eerst wat een verandering Δx_1 van x_1 als verandering van y teweegbrengt.
Dus $\vec{x}$ verandert van $\vec{a}$ tot $\vec{a} + (\Delta x_1, 0, \ldots, 0)$ (enkel de x_1 component verandert, de andere x_i houden we dus constant). Als we opnieuw op lineaire benaderingen overschakelen, gaan we met de partiël e afgeleide naar x_1 moeten werken, vermits enkel de veranderlijke x_1 toeneemt met dx_1, de andere blijven constant.

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \cdot dx_1$$

Wat zal dy zijn als $\vec{x}$ verandert van $\vec{a}$ tot $\vec{a} + \vec{dx} = \vec{a} + (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$?
$(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ is de som van de veranderingen $(dx_1, 0, \ldots, 0), (0, dx_2, \ldots, 0), \ldots$ en de afgeleide is een lineaire afbeelding. We kennen lineaire afbeeldingen uit Lineaire Algebra en weten dat deze afbeeldingen de som bewaren ($f(a+b) = f(a) + f(b)$). Zodoende is dy de som van $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot dx_i$

$$\begin{aligned} dy &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \cdot dx_i \\ &= \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot \vec{dx} \end{aligned}$$

Differentiaal van een samenstelling De formule voor de differentiaal van een samenstelling kunnen we dan als volgt afleiden.
Zij $y = g(u), u = f(x)$ zodat $y = (g \circ f)(x)$
Een verandering du van u geeft dan een verandering $dy = \frac{dy}{du}du$ van y
Een verandering dx van x geeft dan een verandering $du = \frac{du}{dx}dx$ van u en dus een verandering $dy = \frac{dy}{du}du = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}dx$ van y
Stel dat $f(a) = b$ en dat we een verandering van a naar $a + dx$ beschouwen, dan is

$$\begin{array}{rcllll} du &=& f'(a)dx & & \\ dy &=& g'(b)du &=& g'(b)f'(a)dx \\ & & &=& [g'(b)f'(a)]dx \\ & & &=& (g \circ f)'(a)dx \end{array}$$

Hier vinden we dus St. 4.1.10 terug.

0.0.3 Impliciete functies en de kettingregel

Zij $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ een functie van $n+1$ veranderlijken, dan hebben we gezien dat

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Stel nu dat de x_i op hun beurt afhankelijk zijn van de veranderlijke t, dus $x_i(t)$. Dan is f ook via x_i een functie van t en kunnen we f afleiden naar t. De formule hierboven geeft

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

Hoe kunnen we dit interpreteren? Omdat de afgeleide van f naar t een maat is van de verandering van f tengevolge van een verandering van t, kunnen we hier spreken van een rechtstreekse en een onrechtstreekse verandering.
Een voorbeeld: $f(x,y,t) = xte^y + sin(yx) - y^2$ met $x = t^4$ en $y = ch\ t$
Als t verandert, dan ook f wegens de t in de term xte^y. Deze verandering wordt verrekent in de term $\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt}$. Dit zouden we (de maat van) de rechtstreekse verandering kunnen noemen.
Anderzijds zal een verandering van t ook een verandering van bv. y teweegbrengen en via y een verandering van f. Deze verandering wordt verrekend in de term $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ (Zie differentiaal van een samenstelling). Dit zouden we (de maat van) de onrechtstreekse verandering kunnen noemen.

We kunnen dit nu veralgemenen :
Zij f een functie van n onafhankelijke veranderlijken x_i (dit betekent dat de waarde van x_1 niet afhangt van de andere x_i) en m afhankelijke veranderlijken y_j (deze zijn wel afh. van de x_i).
Dus $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ met $y_j(x_1, \ldots, x_n)$
Dan is f dus een functie van n veranderlijken x_i en we kunnen f dan (partieel) afleiden naar x_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}$$

Vermits x_i met $i \neq 1$ onafhankelijk is van x_1, is $\frac{\partial x_i}{\partial x_1} = 0$ en natuurlijk $\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1$.
De formule vereenvoudigt dus tot :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}$$

Er is hier enige verwarring door een overlap van notaties. We zien nl. twee keer $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ in bovenstaande formule. Dit zijn twee verschillende zaken en het onderscheid is het volgende : $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ in het rechterlid is enkel de rechtstreekse verandering van f door een verandering van x_1. Als we daar ook de onrechtstreekse veranderingen $\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1}$ bijtellen, krijgen we de totale verandering van f door x_1, dit is de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ uit het linkerlid.