Hieronder beschrijven we de werkwijze die bij voorkeur gehanteerd wordt om een oefening op impliciete functies op te lossen. De werkwijze wordt opgebroken in verschillende stappen en we ïllustreren elke stap met de oplossing van oefening II.5.6.b.

De opgave Gegeven: $u^2 - v^2 + 2x = 0$ en $uv - y = 0$ die u en v bepalen als impliciete functies van x en y.
Bereken $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

STAP 1 Onderscheid de afhankelijke veranderlijken van de onafhankelijke veranderlijken. Dit is meestal uit de opgave af te lezen.

Veranderlijken: x, y, u, v *waarvan*

- *onafhankelijk:* x, y
- *afhankelijk:* $u(x, y), v(x, y)$

STAP 2 We leiden steeds af naar de onafhankelijke veranderlijken. Beschouwen we bv. voor de algemeenheid afleiden naar x.

Stel de algemene formule op voor afleiden van $f(x, y, u, v)$ naar x.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Zie het tekstje over differentialen en de kettingregel voor een verklaring van deze formule.

Stel vervolgens de vereenvoudigde formule op voor afleiden van $f(x, y, u(x, y), v(x, y))$ naar x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

STAP 3 Pas de (vereenvoudigde) formule toe op elk van de betrekkingen. We verkrijgen dan een lineair stelsel/vergelijking waar we de gezochte (partiële) afgeleide(n) kunnen uit oplossen.

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & u^2 - v^2 + 2x \\ & \Downarrow & \\ \frac{\partial 0}{\partial x} & = & \frac{\partial}{\partial x}(u^2 - v^2 + 2x) \\ & \Downarrow & \\ 0 & = & 2 + 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
0 & = & uv - y \\
& \Downarrow & \\
\frac{\partial 0}{\partial x} & = & \frac{\partial}{\partial x}(uv - y) \\
& \Downarrow & \\
0 & = & 0 + v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}
\end{array}
$$

De twee betrekkingen, met behulp van de vereenvoudigde formule, afleiden naar x geeft dus het lineair stelsel

$$
\begin{array}{lcl}
2 + 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\
v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} & = & 0
\end{array}
$$

Oplossen naar de gezochte $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{-u}{u^2+v^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x} & = & \frac{v}{u^2+v^2}
\end{array}
$$

Opmerking: We kunnen STAP 3 herhalen voor de afgeleide naar y. Uit de twee betrekkingen vinden we dan een stelsel waaruit we $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ kunnen oplossen.

STAP 4 Voor de (partiële) afgeleiden van een hogere orde passen we opnieuw de (vereenvoudigde) formule toe, maar i.p.v. op de betrekking(en) zelf, passen we ze nu toe op de in STAP 3 of STAP 4 berekende afgeleide van lagere graad.

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
& = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-u}{u^2+v^2}\right) \\
& = & 0 + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial v}{\partial x} \\
& = & \frac{3uv^2-u^3}{(u^2+v^2)^3}
\end{array}
$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van de in STAP 3 berekende resultaten.