KWADRIEKEN HERLEIDEN

We bespreken de algemene methode om een kwadriek of een kegelsnede te herleiden naar de standaardvorm of normaalvorm. Dit betekent dat we overgaan op een nieuw coördinatenstelsel zodat de gegeven kwadriek ten opzichte van dat stelsel een eenvoudige vergelijking heeft. Meer specifiek zoeken we een vergelijking waarin geen mengvormen of dubbelproducten $(xy, yz, \ldots)$ in voorkomen en zodat elke coördinaat ofwel enkel in een lineaire term voorkomt ofwel enkel in een kwadratische ofwel helemaal niet.

We starten van de vergelijking van de kwadriek ten opzichte van de standaardbasis in $\mathbb{R}^n$. Zoals in de theorie wordt uitgelegd, kan je deze vergelijking nu opsplitsen in een kwadratische, een lineaire en een constante term.

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x) & = & \sum_{i,j=1}^n q_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^n q_ix_i + q & \qquad \text{met } q_{ij}, q_i, q \in \mathbb{R} \\ & = & f(x) + 2\ell(x) + q & \\ & = & {}^t\bar{x}A\bar{x} + 2{}^t\bar{b}\bar{x} + q. & \end{array}$$

Hierbij is dus $f(x) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}x_ix_j$ de kwadratische term (vorm) en $\ell(x) = \sum_{i=1}^n q_ix_i$ de lineaire term (vorm). De kwadratische vorm kunnen we voorstellen aan de hand van een matrix $A = (q_{ij})$, de lineaire term aan de hand van een vector $\bar{b} = (q_1, \ldots, q_n)$.

De coördinatentransformatie die we gaan uitvoeren, moet de eigenschappen van de Euclidische meetkunde behouden (we willen vermijden dat bijvoorbeeld ellipsen in cirkels worden omgezet). Dit betekent dat de coördinatentransformatie niets anders is dan een isometrie, en dus van de vorm :

$$\bar{y} = M\bar{x} + \bar{a}$$

waar $\bar{x}$ de oorspronkelijke coördinaten voorstellen en $\bar{y}$ de nieuwe, M een orthogonale matrix is (i.e. ${}^tM = M^{-1}$ en M bepaalt een basisverandering naar een orthonormale basis) en $\bar{b}$ een vector is waarover wordt verschoven.

1. Stap 1 : eerte coördinatentransformatie : basisverandering

Stap 1a : Kwadratische vorm diagonaliseren. In de eerste stap naar de normaalvorm gaan we de dubbelproducten wegwerken. Dit kan men doen door over te gaan van de standaardbasis op een orthonormale basis ten opzichte waarvan de gegeven kwadratische vorm gediagonaliseerd is. (Dat zo'n basis bestaat volgt uit de theorie). Hiervoor ga je dus als volgt te werk (zie ook de lessen over diagonaliseren van symmetrische matrices).

(1) Stel de karakteristieke vergelijking op van de matrix A.

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

(2) Los deze vergelijking op, dit levert de eigenwaarden van de matrix A : $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ en zoek voor elke eigenwaarde de algebraïsche multipliciteit (dit is het aantal keer dat de eigenwaarde voorkomt als oplossing van de karakteristieke vergelijking) $m_1, \ldots, m_k$. Merk op dat $\sum_{i=1}^k m_i = n$.

(3) Los voor elke eigenwaarde het stelsel $(A - \lambda_iI_n)\bar{x} = 0$ op, de oplossingsruimte hiervan is de eigenruimte V_i horend bij de eigenwaarde λ_i.

(4) Zoek voor elke eigenruimte nu een *orthonormale* basis, deze noemen we E_i

(5) De unie van alle gevonden bassisen $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ is nu de gezochte orthonormale basis van eigenvectoren voor de ruimte $\mathbb{R}^n$.

We gaan nu dus over op de gevonden orthonormale basis E. Dit levert een *eerste coördinatentransformatie* op.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n \\ E & M & St.B. \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n \\ St.B & M^{-1} & E \end{array}$$

$$S_1 \left\{ \begin{array}{lcccc} x_1 & = & m_{11}x'_1 + & \cdots & +m_{1n}x'_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & = & m_{n1}x'_1 + & \cdots & +m_{nn}x'_n \end{array} \right. \qquad S_2 \left\{ \begin{array}{lcccc} x'_1 & = & m_{11}x_1 + & \cdots & +m_{n1}x_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_n & = & m_{1n}x_1 + & \cdots & +m_{nn}x_n \end{array} \right.$$

Waarbij we noteerden $M = (m_{ij})$ en omdat M de overgang tussen twee orthonormale basissen beschrijft en dus een orthogonale matrix is, is $M^{-1} = {}^tM = (m_{ji})$.

We zoeken nu de vergelijking van onze kwadriek ten opzichte van deze nieuwe basis, dus de vergelijking in coördinaten met accenten. Het kwadratische gedeelte is het gemakkelijkst : we hebben de kwadratische vorm immers gediagonaliseerd, je vindt de nieuwe vergelijking van de kwadratische vorm dus door de eigenwaarden op de juiste plaatsen in te vullen of door de diagonaalmatrix $A' = {}^tMAM$ langs links en rechts te vermenigvuldigen met respectievelijk de rij- en kolommatrix van $\bar{x}'$.

Het lineair gedeelte kan je op twee manieren vinden. Ofwel vul je het eerste stelsel van de coördinatentransformatie (de x_i in functie van de x'_i) in in de oorspronkelijke vergelijking (dit kon je overigens ook doen voor de kwadratische vorm), ofwel kan je (dit bespaart je een beetje schrijf- en rekenwerk) het matrixproduct $\bar{b}M\bar{x}$ berekenen.

Aan de constante term verandert er niets, die kan je dus gewoon overschrijven. We bekomen aldus de vergelijking

$$\begin{aligned} \varphi'(\bar{x}') &= \varphi(\bar{x}) \\ &= {}^t\bar{x}A\bar{x} + 2{}^t\bar{b}\bar{x} + q \\ &= {}^t\bar{x}'{}^tMAM\bar{x}' + 2{}^t\bar{b}M\bar{x}' + q \\ &= {}^t\bar{x}'A'\bar{x}' + 2{}^t\bar{b}'\bar{x}' + q \end{aligned}$$

Stap 1b : Lineaire termen zonder kwadratische term samenvoegen. In deze stap gaan we de lineaire termen zonder kwadratische term herschrijven als één enkele lineaire term. Deze stap hoeft dan uiteraard enkel te gebeuren wanneer er meer dan 1 lineaire term zonder kwadratische term voorkomt, aangezien we in de oefeningen enkel werken in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, komt dit enkel voor indien we werken over $\mathbb{R}^3$ en we bij het diagonaliseren tweemaal eigenwaarde nul hadden. De vergelijking van de kwadriek is dus van de vorm (we laten de accenten even vallen)

$$\varphi'(\bar{x}) = ax^2 + b_1x + b_2y + b_3z + q.$$

We willen nu van de basis E uit de vorige stap overgaan op een nieuwe orthonormale basis B zodanig dat de twee lineaire termen samengevoegd worden en er niets veranderd aan de kwadratische term,. Zo'n basisovergang wordt bepaald door een orthogonale matrix die er voor moet zorgen dat voor de nieuwe coördinaten x', y', z' geldt dat $x' = x$ en $y' = k(b_2y + b_3z)$ voor een zekere $k \in \mathbb{R}$. De gezochte orthogonale matrix is dan

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell b_2 & \ell b_3 \\ 0 & \ell b_3 & -\ell b_2 \end{pmatrix}$$

waarbij $\ell = \frac{1}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}}$ (zie oefeningen over het opstellen van een orthogonale matrix met kollom/rij evenredig met gegeven vector). De matrices P en ${}^tP$ bepalen dan een extra basis overgang, die bij de eerste basisovergang uit het vorige deel kan gevoegd worden om de totale basisovergang te vinden.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3 \\
B & P & E & M & St.B. & St.B & M^{-1} = {}^tM & E & P^{-1} = {}^tP & \\
\mathbb{R}^3 & & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 & & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^3}} & & \mathbb{R}^3 \\
B & & MP & & St.B. & St.B. & & P^{-1}M^{-1} = (MP)^{-1} & & B
\end{array}$$

Het opstellen van de coördinaten transformaties is analoog zoals in de vorige stap, je moet enkel M door MP vervangen. Dit levert dan nieuwe stelsels S_1 en S_2 op, waarmee je verder moet werken in de oefening.

De nieuwe vergelijking is dan van de vorm

$$\varphi''(\bar{x}') = ax'^2 + b_1x' + \ell^{-1}y' + q$$

Stap 2 : Lineaire en constante termen wegwerken

Bij de tweede stap gaan we nu waar mogelijk de lineaire en constante termen wegwerken. We beginnen met de lineaire termen.

Stap 2a : de lineaire termen met kwadratische term wegwerken. Voor alle coördinaten die *zowel* een kwadratische als een lineaire term hebben, kunnen we nu deze lineaire term als volgt wegwerken. We starten dus met iets van de vorm $ax_i'^2 + bx_i'$, wat we op de volgende manier herschrijven :

$$\begin{aligned} ax_i'^2 + bx' &= a(x_i'^2 + \tfrac{b}{a}x_i') \\ &= a(x_i' + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

De term die tussen haakjes staat, wordt onze nieuwe coördinaat, dus :

$$x_i'' = x_i' + \frac{b}{2a}$$

Stap 2b : de constante term wegwerken. Indien er nu nog een lineaire term overblijft (waarvoor we dus geen overeenkomstige kwadratische term hebben), dan kunnen we met deze coördinaat nog de constante term wegwerken. Dit gebeurt als volgt.

$$ax_i' + b = a(x_i' + \tfrac{b}{a})$$

En opnieuw noemen we het geen tussen haakjes staat de nieuwe coördinaat.

$$x_i'' = x_i' + \frac{b}{a}$$

Indien je de voorgaande transformaties overal waar het mogelijk was hebt uitgevoerd, bekomen we zo een *tweede coördinatentransformatie*. Die is dan steeds van de vorm

$$S_1' \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'' &=& x_1' + a_1 \\ \vdots && \vdots \\ x_n'' &=& x_n' + a_n \end{array} \right. \qquad S_2' \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& x_1'' - a_1 \\ \vdots && \vdots \\ x_n' &=& x_n'' - a_n \end{array} \right.$$

en dus een verschuiving. In de nieuwe vergelijking van de kwadriek (in coördinaten met dubbele accenten) komt elke coördinaat nu voor óf in een lineaire term, óf in een kwadratische term óf helemaal niet en bovendien komen er geen 'dubbel produkten' meer voor. Indien er een lineaire term voorkomt, is er ook geen constante term meer.

Stap 3 : de bespreking

Nu we de standaardvorm van de kwadriek gevonden hebben, kunnen we beginnen aan de bespreking. Bepaal aan de hand van de vorm van de vergelijking met welk type van kwadriek je te maken hebt en wat de assen zijn (voor kegelsneden, zie hiervoor de formules p 63-65 en voor kwadrieken in $\mathbb{E}^3$ p 66-72, let wel op : het examen is volledig gesloten boek!). De toppen kan je vinden door de snijpunten van elk van de assen met de kwadriek te zoeken, dus door het stelsel op te lossen bepaald door de vergelijking van een as en de gevonden standaardvorm van de vergelijking van de kwadriek. De coördinaten voor de toppen die je zo vindt, evenals de vergelijkingen van de assen zijn nu wel ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel (dat met dubbele accenten). Om de coördinaten en vergelijkingen ten opzichte van het oorspronkelijke coördinatenstelsel te vinden, moet je eerst nog de totale coördinatentransformaties opstellen.

Deze totale coördinatentransformaties vind je door S_2 in te vullen in S_1' en S_2' in S_1. Op die manier bekom je de volgende transformaties.

$$S\left\{\begin{array}{lcccccc} x_1'' & = & m_{11}x_1+ & \cdots & +m_{n1}x_n & +a_1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n'' & = & m_{1n}x_1+ & \cdots & +m_{nn}x_n & +a_n \end{array}\right.$$

$$S'\left\{\begin{array}{lccccc} x_1 & = & m_{11}(x_1''-a_1)+ & \cdots & +m_{1n}(x_n''-a_n) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & = & m_{n1}(x_1''-a_1)+ & \cdots & +m_{nn}(x_n''-a_n) \end{array}\right.$$

Het stelsel S' is nu nog te herschrijven als

$$S'\left\{\begin{array}{lcccccccc} x_1 & = & m_{11}x_1''+ & \cdots & +m_{1n}x_n'' & -m_{11}a_1- & \cdots & -m_{1n}a_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & = & m_{n1}x_1''+ & \cdots & +m_{nn}x_n'' & -m_{n1}a_1- & \cdots & -m_{nn}a_n \end{array}\right.$$

waarbij je nu ziet dat je het eerste deel van dit stelsel vindt door het stelsel S_1 over te schrijven, maar dan met dubbele accenten ipv accenten en het tweede deel door de vector $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ in te vullen in S_1.

Om de vergelijkingen van de assen ten opzichte van het oorspronkelijke assenstelsel te vinden, kan je nu gebruik maken van het stelsel S. Als bv $x_1'' = 0$ een as is van de kwadriek, dan heeft die as ten opzichte van het oorspronkelijke coördinatenstelsel de vergelijking $m_{11}x_1 + \cdots + m_{n1}x_n + a_1 = 0$.

Om de coördinaten van de toppen ten opzichte van het oorspronkelijke assenstelsel te vinden, kan je nu gebruik maken van het stelsel S'. Als bv $(b_1'', \ldots, b_n'')$ de coördinaten zijn van één van de toppen ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsels (met dubbele accenten), dan heeft deze top ten opzichte van het oorspronkelijke assenstelsel de coördinaten $(b_1, \ldots, b_n)$, met

$$\left\{\begin{array}{lcccccccc} b_1 & = & m_{11}b_1''+ & \cdots & +m_{1n}b_n'' & -m_{11}a_1- & \cdots & -m_{1n}a_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & = & m_{n1}b_1''+ & \cdots & +m_{nn}b_n'' & -m_{n1}a_1- & \cdots & -m_{nn}a_n \end{array}\right.$$