Overgangsmatrices

14 oktober 2002

In dit document wordt behandeld hoe de coördinaten van vectoren en de matrix van een lineaire afbeelding veranderen bij overgang naar een nieuwe basis.

1 De matrix van een lineaire afbeelding

In oefening 22 hebben we gezien dat we met elke lineaire afbeelding tussen twee eindig dimensionale vectorruimten over hetzelfde veld een matrix kunnen associëren. Omgekeerd correspondeert met elk zo'n matrix ook een linaire afbeelding. Om te beginnen herhalen we nog even het verband tussen een lineaire afbeelding en zijn geassocieerde matrix.

Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding van de n-dimensionale vectorruimte V naar de m-dimensionale ruimte W. Kies een basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ voor V en een basis $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ voor W. Zij nu v een willekeurige vector van de ruimte V met coördinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ ten opzichte van de basis B, dan zoeken we nu de coördinaten $(x'_1, \ldots, x'_m)$ van $f(v) \in W$ ten opzichte van de basis B'. Omwille van de lineariteit geldt er :

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

en dus is het beeld van een willekeurige vector van V volledig bepaald door de beelden van de basisvectoren van V. Noteren we de coördinaten van het beeld van e_i ten opzichte van B' met a_{ij}, maw :

$$f(e_i) = a_{i1} e'_1 + \ldots + a_{im} e'_m \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n$$

(merk op dat we enkel een notatie ingevoerd hebben en dat de bovenstaande regel dus geen definitie is), dan vinden we

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1(a_{11} e'_1 + \ldots + a_{1m} e'_m) + \ldots + x_n(a_{n1} e'_1 + \ldots + a_{nm} e'_m) \\ &= (a_{11} x_1 + \ldots + a_{n1} x_n) e'_1 + \ldots + (a_{1m} x_1 + \ldots + a_{nm} x_n) e'_m \\ &= x'_1 e'_1 + \ldots + x'_m e'_m \end{aligned}$$

wat we in matrixnotatie kunnen schrijven als

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Merk op dat de matrix $A = (a_{ij})$ de matrix is gevormd door in de kolommen de coördinaten ten opzichte van de basis S' van W te schrijven van de beelden van de basisvectoren van V.

Met elke afbeeldig f van V naar W kunnen we dus op deze manier een $m \times n$ matrix associëren en omgekeerd correspondeert met elk zo'n matrix een lineaire afbeelding van V naar W. We wijzen er wel op dat de matrix van een lineaire afbeelding afhankelijk is van de gekozen basissen ! Een matrix bepaalt dus slechts een lineaire afbeelding, wanneer erbij verteld wordt welke basissen beschouwd worden, en omgekeerd kunnen met één enkele lineaire afbeelding verschillende matrices geassocieerd worden, afhankelijk van de gekozen basissen. Deze opmerking leidt ons tot het invoeren van de volgende notatie.

Notatie. Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding. Zij S een basis van V en T een basis van W. Dan noteren we de matrix van f t.o.v. de basissen S en T als $M_{TS}(f)$ (let op de omgekeerde volgorde in de schrijfwijze!).

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\qquad\qquad f \qquad\qquad} & W \\ S & & T \end{array}$$

Volgende eigenschap uit de theorie zullen we nodig hebben:

Eigenschap 1.1. Zij $f : V \to W$ en $g : W \to Z$ lineaire afbeeldingen, S een basis van V, T een basis van W en U een basis van Z. Dan geldt:

$$M_{US}(g \circ f) = M_{UT}(g) \cdot M_{TS}(f)$$

Deze eigenschap kan verwarrend overkomen, omdat je eerst de afbeelding f uitvoert en nadien de afbeelding g, maar je bij het opstellen van de matrix van de samengestelde afbeelding het product neemt waarbij je eerst de matrix van g schrijft en rechts daarvan de matrix van f. De eigenschap is echter gemakkelijk te onthouden door de volgende beschouwing te maken : het beeld nemen een vector v komt overeen met de kollommatrix $\bar{x}$ van de coördinaten van v ten opzichte van de basis S langs links te vermenigvuldigen met de matrix van deze afbeelding, dus :

$$f(v) \rightsquigarrow M_{TS}(f)\bar{x}$$

en

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) \rightsquigarrow M_{UT}(g)(M_{TS}(f)\bar{x}).$$

Een direct gevolg van eigenschap 1.1 is:

Gevolg 1.1. Zij $f : V \to W$ een bijectieve lineaire afbeelding, S een basis van V en T een basis van W. Dan geldt:

$$M_{ST}(f^{-1}) = M_{TS}(f)^{-1}$$

Matrix van een Basisovergang
Een bijzonder en veel voorkomend geval van het voorgaande is dat van een basisovergang. Dit is de situatie waarbij $V = W$ en $f = id_V$, de identieke afbeelding op V, maar $B \neq B'$. Bij zulk een lineaire afbeelding veranderen de vectoren zelf niet, maar wel hun schrijfwijze. Een vector $v \in V$ wordt dan steeds afgebeeld op zichzelf ($id_V(v) = v$), maar de coördinaten van v veranderen wel, omdat we met een andere basis werken, met andere woorden de manier waarop we v noteren verandert wel, maar v zelf niet.

Voorbeeld 1.1. Stel $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ (de standaardbasis) en $B' = \{(1,1),(0,1)\}$. Zij nu $v \in V$ met als coördinaten in de standaardbasis $(2,1)$, dan is $id_V(v) = v$, maar de coördinaten van $id_V(v)$ drukken we uit in de nieuwe basis B', en dus zeggen we dat $(2,-1)$ de coördiaten zijn van $id_V(v)$, want $id_V(v) = v = (2,1) = 2 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (0,1)$.

Bekijken we nu nog even wat de matrix is van een dergelijke transformatie. In het voorgaande hebben we gezien dat we de matrix van een lineaire afbeelding $f : V \to W$ kunnen opstellen door in de kolommen de coördinaten ten opzichte van de basis B' van W te schrijven van de beelden onder f van de basisvectoren van de basis B van V. Als we dit vertalen naar het huidige geval, dan zien we het het beeld van de basisvectoren van B deze basisvectoren zelf zijn, en in de kolommen van de matrix moeten we dus de coördinaten van de 'oude' basisvectoren van B ten opzichte van de 'nieuwe' basis B' schrijven.

Voorbeeld 1.2. Nemen we de zelfde situatie als in voorbeeld 1.1, dan vinden we voor de overgang van B naar B' :

$$\begin{array}{rcl} (1,0) & = & 1(1,1) - 1(0,1) \\ (0,1) & = & 0(1,1) + 1(0,1) \end{array}$$

(oude basis in functie van de nieuwe basis) en dus is de matrix (de gevonden coördinaten invullen in de kolommen) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

We kontroleren of dit overeenkomt met de resultaten uit voorbeeld 1.1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zodat we inderdaad vinden dat $(2, -1)$ de coördinaten zijn van $id_V(v)$ ten opzichte van de basis $B' = \{(1,1), (0,1)\}$.

2 De overgangsmatrix

In deze paragraaf werken we steeds met een lineaire afbeelding $f : V \to W$. Ten opzichte van een basis E van V en een basis E' van W heeft f een matrix $M_{E'E}(f) = A$. We zullen bespreken hoe we de matrix $M_{B'B}(f) = A'$ van f t.o.v een basis B van V en een basis B' van W kunnen vinden, vertrekkend van de matrix A.

We vertrekken dus van de volgende situatie:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[A]{\quad f \quad} & W \\ E & & E' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[A']{\quad f \quad} & W \\ B & & B' \end{array}$$

De oplossing bestaat erin om 2 extra lineaire afbeelingen te beschouwen, namelijk id_V en id_W, op de volgende manier:

$$\begin{tikzcd}
\substack{V \\ E} \arrow[r, "f", "A"'] & \substack{W \\ E'} \arrow[d, "id_W"] \\
\substack{V \\ B} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f", "A'"'] & \substack{W \\ B'}
\end{tikzcd}$$

Het is nu belangrijk dat we een onderscheid maken tussen de gegeven afbeelding f en de nieuw ingevoerde afbeeldingen id_V en id_W, die de basisovergangen beschrijven. de afbeeldingen id_V en id_W veranderen niets aan de beschouwde vectoren zelf, maar enkel aan de manier waarop we ze noteren. Zo gaan we via de afbeelding id_V over van basis B naar basis E in V, waardoor de vectoren zelf niet veranderen, maar wel hun coördinaten, en daardoor verandert natuurlijk ook de vorm van de matrix geassocieerd aan de afbeelding f, omdat die opgebouwd is uit de coördinaten van de beelden van de basisvectoren van V.

We kunnen dan de volgende gelijkheid van lineaire afbeeldingen neerschrijven (de eerste f is de bovenste pijl in vorige tekening en de tweede f is de onderste pijl):

$$f = id_V \circ f \circ id_W$$

Bewijs.

$$id_V \circ f \circ id_W(v) = id_V(f(id_W(v))) = id_V(f(v)) = f(v) \qquad \forall v \in V$$

$\square$

Uit deze gelijkheid halen we (wegens eigenschap 1.1):

$$M_{B'B}(f) = M_{B'E'}(id_W) \cdot M_{E'E}(f) \cdot M_{EB}(id_V)$$

We noemden $M_{B'B}(f)$ de matrix A' en $M_{E'E}(f)$ de matrix A, dus :

$$\boxed{A' = M_{B'E'}(id_W) \cdot A \cdot M_{EB}(id_V)}$$

Dit is dus het verband tussen A en A'.

Voorbeeld 2.1. Beschouw de lineaire afbeelding

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 3z)$$

De matrix van f t.o.v. de basissen $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ voor $\mathbb{R}^3$ en $\{(1,0), (0,1)\}$ voor $\mathbb{R}^2$ vinden we als volgt:

$$\begin{array}{rcccl}
f(1,1,0) & = & (3,0) & = & 3(1,0) + 0(0,1) \\
f(0,1,1) & = & (1,3) & = & 1(1,0) + 3(0,1) \\
f(1,0,1) & = & (2,3) & = & 2(1,0) + 3(0,1)
\end{array}$$

We vinden dus:

$$M_{E'E}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Zij nu $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ een andere basis voor $\mathbb{R}^3$ en $\{(1,1),(0,1)\}$ een andere basis voor $\mathbb{R}^2$. We zullen dan $M_{B'B}(f)$ opstellen via de formule:

$$M_{B'B}(f) = M_{B'E'}(id_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{E'E}(f) \cdot M_{EB}(id_{\mathbb{R}^3})$$

We moeten dus eerst de matrix $M_{B'E'}(id_{\mathbb{R}^2})$ opstellen:

$$\begin{array}{rcccl} id_{\mathbb{R}^2}(1,0) & = & (1,0) & = & 0(1,1)+1(1,0) \\ id_{\mathbb{R}^2}(0,1) & = & (0,1) & = & 1(1,0)-1(0,1) \end{array}$$

En we vinden dus:

$$M_{B'E'}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vervolgens stellen we de matrix op van $M_{EB}(id_{\mathbb{R}^3})$:

$$\begin{array}{rcccl} id_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) & = & (1,0,0) & = & a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,0,1) \\ id_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) & = & (0,1,0) & = & d(1,1,0)+e(0,1,1)+f(1,0,1) \\ id_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) & = & (0,0,1) & = & g(1,1,0)+h(0,1,1)+i(1,0,1) \end{array}$$

Werken we bijvoorbeeld de eerste vergelijking uit (de anderen zijn analoog):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & a+c \\ 0 & = & a+b \\ 0 & = & b+c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & a+c \\ a & = & -b \end{array} \right. = c \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ b & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right. = \frac{1}{2}$$

En we vinden:

$$M_{EB}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Het besluit is dan:

$$M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$